

1. a) (5b) Odredite (ako postoje) jednu savršenu disjunktivnu i jednu savršenu konjunktivnu normalnu formu za formulu $(P \rightarrow Q) \wedge (P \leftrightarrow R)$
- b) (5b) Navedite formulu logike sudova za koju ne postoji savršena konjunktivna normalna forma. Navedite neku konjunktivnu normalnu formu za tu formulu. Postoji li formula koja nema ni savršenu disjunktivnu ni savršenu konjunktivnu normalnu formu? Obrazložite sve svoje tvrdnje.
- c) (10b) Neka su A_1, \dots, A_n elementarne disjunkcije i $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ savršena konjunktivna normalna forma koja je antitautologija. Dokažite da je $\{Int \setminus \mathcal{I}_{A_1}, \dots, Int \setminus \mathcal{I}_{A_n}\}$ particija skupa svih interpretacija. Sa Int označavamo skup svih interpretacija. Za formulu logike sudova F definiramo skup \mathcal{I}_F kao skup svih interpretacija I takvih da je $I(F) = 1$.
2. Neka je $S = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ maksimalno konzistentan skup formula logike sudova u odnosu na sustav RS .
 - a) (5b) Neka je T skup svih logičkih posljedica od S . Dokažite da je $S = T$.
 - b) (5b) Neka je F formula logike sudova takva da je $\bigwedge_{i \in I} F_i \wedge F$ ispunjiva za svaki konačan $I \subseteq \mathbb{N}$. Dokažite da je $F \in S$.
 - c) (5b) Dokažite da postoji pravi nadskup od S koji je nezavisan.
3. (10b) U sustavu prirodne dedukcije izvedite:

$$\neg R \leftrightarrow (Q \wedge (P \rightarrow R)) \vdash R \leftrightarrow (\neg Q \vee (P \wedge \neg R))$$

4. a) (5b) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\forall x \forall y (R(x, y) \leftrightarrow P(y, x)) \vee \exists y Q(y).$$

Ukoliko formula nije valjana, navedite $\{P, Q, R\}$ -strukturu koja to dokazuje.

- b) (10b) Dokažite da je skup formula

$$S = \{\exists y \neg R(y, x), R(x, x), \neg R(x, y) \rightarrow (\neg R(y, z) \rightarrow \neg R(x, z))\}$$

ispunjiv te da je svaka $\{R\}$ -strukture koja to dokazuje beskonačna.

5. (10b) Neka je $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je S ispunjiv skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

- a) Ako je G zatvorena formula takva da $S \models G \rightarrow F_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tada za svaki $m \in \mathbb{N}$, S ima konačan normalan model kardinalnosti barem m .
- b) Ako S ima konačan normalan model kardinalnosti barem m za neki $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tada skup $S \cup \left\{ \bigwedge_{i \in I} F_i : I \subseteq \{1, \dots, m\} \right\}$ ima konačan normalan model.