

1. a) (5b) Neka je F formula logike sudova u kojoj se javlja samo veznik \neg . Dokažite da F nije ni tautologija ni antitautologija.
b) (5b) Odredite (ako postoje) jednu savršenu disjunktivnu i jednu savršenu konjunktivnu normalnu formu za formulu $(\neg R \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)) \wedge (P \rightarrow (Q \vee R))$
c) (5b) Neka je P propozicionalna varijabla. Navedite formulu logike sudova F složenosti 3 takvu da je formula $P \leftrightarrow F$ antitautologija. Za navedenu formulu F , navedite jedan beskonačan skup formula logike sudova S čiji jednočlan skup aksioma je $\{P \leftrightarrow F\}$ te navedite jednu konjunktivnu normalnu formu za F . Dokažite da F i S imaju tražena svojstva.
2. a) (6b) Neka je S skup formula logike sudova takav da za svaku interpretaciju I za koju vrijedi $I(S) = 0$ postoje propozicionalne varijable P i Q takve da je $I(P \leftrightarrow Q) = 1$. Dokažite da postoji konačni podskup od S s istim svojstvom.
b) (7b) Za skup logike sudova S , sa $[S]$ označavamo skup svih logičkih posljedica od S . Dokažite da uvijek vrijedi $[S] = \llbracket S \rrbracket$. Dokažite da je S skup aksioma za $[S]$.
c) (6b) Neka je S maksimalno konzistentan skup formula logike sudova u odnosu na sustav RS te neka su F i G formule logike sudova. Dokažite da je $F \rightarrow G \in S$ ako i samo ako $F \notin S$ ili $G \in S$.

3. (10b) U sustavu prirodne dedukcije izvedite:

- a) $(P \vee Q) \wedge (R \vee S) \vdash ((P \wedge R) \vee (P \wedge S)) \vee ((Q \wedge R) \vee (Q \wedge S))$
b) $\vdash \neg \neg P \vee (Q \rightarrow \neg P)$

4. a) (6b) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\left((\forall x \exists y R(x, y) \vee \forall x \forall y (\neg Q(x) \wedge \neg Q(y))) \right) \wedge \neg \forall x \forall y \exists z (P(x, y) \rightarrow (R(x, x) \vee \neg Q(y))).$$

Ukoliko formula nije valjana, navedite $\{P, Q, R\}$ -strukturu koja to dokazuje.

b) (10b) Dokažite da formula $\forall x \forall y R(x, y)$ nije logička posljedica skupa

$$S = \{ (\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, z)) \rightarrow \neg R(x, z), R(x, x), \neg R(x, y) \rightarrow \exists z \neg R(y, z) \}$$

te da je svaka $\{R\}$ -struktura koja to dokazuje beskonačna.

5. (10b) Neka je $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je S ispunjiv skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

- a) Ako skup $S \cup \{F_{2n}\}$ ima normalan model za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tada S ima beskonačan normalan model.
- b) Ako skup $S \cup \{F_{2n}\}$ ima normalan model za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tada S ima konačan normalan model.