

**Napomena:** Detaljno dokažite sve svoje tvrdnje. Tvrdnje s predavanja nije potrebno dokazivati.

1. a) (6b) Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju. Neka je  $S$  skup formula logike sudova. Tada je skup  $\{F \wedge G : F, G \in S\}$  ispunjiv ako i samo ako je skup  $\{F \vee G : F, G \in S\}$  ispunjiv.
  - b) (7b) Navedite beskonačan skup formula logike sudova koji je istinita za točno jednu interpretaciju. Dokažite da navedeni skup ima traženo svojstvo te navedite tu interpretaciju. Dokažite da ne postoji konačan skup formula logike sudova s tim svojstvom.
  - c) (5b) Odredite (ako postoje) jednu savršenu disjunktivnu i jednu savršenu konjunktivnu normalnu formu za formulu  $(P \wedge (Q \leftrightarrow \neg R)) \rightarrow (\neg P \vee Q)$
2. a) (7b) Neka je  $S$  skup formula logike sudova takav da za svaku interpretaciju  $I$  takvu da  $I(S) = 1$  postoje propozicionalne varijable  $P_i$  i  $P_j$  takve da  $I(P_i \vee P_j) = 0$ . Dokažite da postoji konačan podskup od  $S$  koji ima isto svojstvo.
  - b) (8b) Dokažite da je beskonačan nezavisan skup formula logike sudova konzistentan.
3. U sustavu prirodne dedukcije izvedite:
  - a) (6b)  $\vdash ((P \wedge Q) \rightarrow R) \leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$
  - b) (5b)  $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vdash \neg\neg\neg(P \leftrightarrow Q)$
4. a) (6b) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\forall x \forall y (R(x, y) \vee \exists z R(y, z)) \wedge \exists x \exists y \exists z ((P(x, z) \wedge R(z, y)) \rightarrow Q(x, y))$$

Ukoliko formula nije valjana, navedite  $\{P, Q, R\}$ -strukturu koja to dokazuje.

- b) (10b) Dokažite da je skup formula

$$S = \{\neg R(x, x), \exists y R(x, y), \neg R(x, z) \rightarrow (\neg R(x, y) \vee \neg R(y, z))\}$$

ispunjiv te da je svaka  $\{R\}$ -struktura koja to dokazuje beskonačna.

5. (10b) Neka je  $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Neka je  $S$  skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:
  - a) Ako postoji zatvorena formula  $G$  takva da  $S \models F_n \rightarrow G$  za svaki  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , tada  $S$  ima beskonačan normalan model.
  - b) Ako postoji zatvorena formula  $G$  takva da  $S \not\models F_n \rightarrow \neg G$  za svaki  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , tada  $S$  ima beskonačan normalan model.