

1. a) (6b) Dokažite ili opovrgnite sljedeću tvrdnju. Neka je S skup formula logike sudova. Tada je skup $\{F \wedge G : F, G \in S\}$ ispunjiv ako i samo ako je skup $\{F \leftrightarrow G : F, G \in S\}$ ispunjiv.
- b) (6b) Odredite (ako postoje) jednu savršenu disjunktivnu i jednu savršenu konjunktivnu normalnu formu za formulu $(P \rightarrow \neg Q) \wedge \neg((R \leftrightarrow Q) \vee \neg P)$
- c) (6b) Navedite konzistentan skup formula logike sudova koji nije maksimalno konzistentan u odnosu na sustav RS . Dokažite da ne postoji dvočlani maksimalno konzistentan skup. Je li skup svih ispunjivih formula logike sudova maksimalno konzistentan? Dokažite sve svoje tvrdnje.
2. a) (6b) Neka su S_1 i S_2 skupovi logike sudova takvi da za svaku interpretaciju I takvu da $I(S_1) = 1$ vrijedi $I(S_2) \neq 1$. Dokažite da postoji formula logike sudova F takva da $S_1 \models F$ i $S_2 \models \neg F$.
- b) (5b) Dokažite da skup $S = \{P_i \wedge P_j \wedge P_k : i, j, k \in \mathbb{N}, i < j < k\}$ nije nezavisan. Dokažite da je S potpun skup.
- c) (7b) Za skup logike sudova S , sa $[S]$ označavamo skup svih logičkih posljedica od S . Dokažite da uvijek vrijedi $[S] = [[S]]$. Dokažite da je S skup aksioma za $[S]$.
3. (10b) U sustavu prirodne dedukcije izvedite:
 - a) $R \rightarrow (P \leftrightarrow Q) \vdash (R \wedge P) \leftrightarrow (R \wedge Q)$
 - b) $\neg(P \rightarrow R) \vee Q \vdash \neg R \vee Q$
4. a) (6b) Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\left(\exists x \forall y R(x, y) \vee \exists y (\exists x Q(y, x) \rightarrow \forall x R(x, y)) \right) \rightarrow \exists x (R(x, x) \vee P(x)).$$

Ukoliko formula nije valjana, navedite $\{P, Q, R\}$ -strukturu koja to dokazuje.

- b) (10b) Dokažite da je skup formula

$$S = \{ \exists y \neg R(y, x), R(x, x), (\neg R(x, y) \wedge \neg R(y, z)) \rightarrow \neg R(x, z) \}$$

ispunjiv te da je svaka $\{R\}$ -strukture koja to dokazuje beskonačna.

5. (8b) Neka je $F_n \equiv \exists x_1 \dots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Neka je S ispunjiv skup formula logike prvog reda. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

- a) Ako skup $S \cup \{F_{2n}\}$ ima normalan model za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tada S ima beskonačan normalan model.
- b) Ako skup $S \cup \{F_{2n}\}$ ima normalan model za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tada S ima konačan normalan model.