

Matematička logika – popravni kolokvij
19. veljače 2020.

Teorija

1. Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:
 - (a) (1 bod) antitautologija, te navedite tri primjera antitautologija koje sadrže samo veznike \neg i \rightarrow ;
 - (b) (2 boda) izvod u sistemu RS , te navedite dva primjera izvoda;
 - (c) (1 bod) navedite primjer jednog teorema u PD , te tri primjera formula koje nisu teoremi sistema PD ;
 - (d) (2 boda) σ -term, te navedite tri primjera σ_{ZF} -terma čija duljina nije veća od 5;
 - (e) (2 boda) istinitost formule neke teorije prvog reda za σ -interpretaciju.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (a) (1 bod) propozicija o kardinalnosti skupa svih formula logike sudova;
 - (b) (1 bod) Lindenbaumova lema za sistem RS ;
 - (c) (2 boda) generalizirani teorem potpunosti za teorije prvog reda, te definirajte sve pojmove koji se spominju u teoremu.
3. (4 boda) Neka je S skup formula logike sudova za koji postoji točno jedna interpretacija I tako da vrijedi $I(S) = 1$. Dokažite da je skup S konzistentan i potpun.
4. (4 boda) Dokažite da za sve formule F logike prvog reda vrijedi: $\neg\exists xF \Rightarrow \forall x\neg F$.

Zadaci (svaki vrijedi 5 bodova)

1. Neka je I interpretacija takva da je $I(P) = 1$ za svaku propozicionalnu varijablu P i F formula u kojoj se od veznika pojavljuju samo \neg i \leftrightarrow . Dokažite da je $I(F) = 1$ ako i samo ako se \neg u F pojavljuje paran broj puta.

2. (a) Odredite jednu savršenu konjunktivnu normalnu formu za formulu

$$(\neg P \vee Q) \rightarrow (Q \leftrightarrow R).$$

- (b) Ako su A_1, \dots, A_n elementarne konjunkcije i $A_1 \vee \dots \vee A_n$ valjana savršena disjunktivna normalna forma, dokažite da je $\{\mathcal{I}_{A_1}, \dots, \mathcal{I}_{A_n}\}$ particija skupa svih interpretacija.

3. Dokažite da je svaki pravi podskup nezavisnog skupa formula logike sudova ispunjiv.

4. Neka su S i T skupovi formula logike sudova takvi da za svaku interpretaciju I vrijedi $I(S) = 1$ ako i samo ako $I(T) \neq 1$. Dokažite da su S i T konačno aksiomatizabilni te da i njihovi skupovi aksioma imaju navedeno svojstvo.

5. Za skup formula logike sudova S sa $[S]$ označavamo skup svih logičkih posljedica od S . Dokažite da je $[S]$ maksimalno konzistentan ako i samo ako je S potpun i konzistentan.

6. U sustavu prirodne dedukcije izvedite

$$\neg(P \rightarrow R) \vee (P \wedge Q) \vdash \neg R \vee Q.$$

7. Glavnim testom ispitaite ispunjivost skupa formula

$$\{\forall x(Q(x) \rightarrow \neg R(x, x)), \exists y(\forall x R(x, y) \rightarrow \exists x P(y, x)), \exists x \forall y R(x, y)\}.$$

Ako je skup ispunjiv navedite jednu $\{P, Q, R\}$ -strukturu koja to dokazuje.

8. Dokažite da formula

$$\forall x \forall y \neg R(x, y)$$

nije logička posljedica formule

$$\forall x \forall y \forall z (\exists w (R(x, y) \rightarrow R(y, w)) \wedge \neg R(x, x) \wedge (R(x, y) \rightarrow (R(y, z) \rightarrow R(x, z))))$$

te da je svaka $\{R\}$ -struktura koja to pokazuje beskonačna.