

Matematička logika – popravni kolokvij
1. ožujka 2021.

Teorija (rješenja pišite na odvojenim papirima od zadataka)

1. Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:
 - (a) (1 bod) ispunjiva formula i ispunjiv skup formula, te navedite tri beskonačna ispunjiva skupa formula
 - (b) (2 boda) potpun skup formula u odnosu na sistem RS , te navedite tri primjera potpunih konzistentnih skupova formula.
 - (c) (2 boda) izvod u sistemu PD
 - (d) (1 bod) navedite elemente signature Zermelo–Fraenkelove teorije skupova, te navedite vrstu i mjesnost svakog simbola
 - (e) (1 bod) σ –struktura i σ –interpretacija
 - (f) (1 bod) izvod u nekoj teoriji prvog reda
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (a) (1 bod) teorem dedukcije za sistem RS
 - (b) (1 bod) lema o istinitosti za sistem RS
 - (c) (1 bod) teorem o preneksnoj normalnoj formi
 - (d) (1 bod) Löwenheim–Skolemov teorem ”na dolje”
3. (4 boda) Dokažite da je svaki ispunjiv skup formula logike sudova nužno konzistentan u odnosu na teoriju PD .
4. (4 boda) Dokažite teorem kompaktnosti za logiku prvog reda.

Zadaci (svaki vrijedi 5 bodova)

1. Dokažite da za svaku formulu F postoji formula G u kojoj se pojavljuju samo veznici iz skupa $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ takva da je $F \Leftrightarrow G$ ili $F \Leftrightarrow \neg G$.
2. Odredite jednu savršenu disjunktivnu normalnu formu za formulu

$$(P \vee R) \leftrightarrow \neg(Q \rightarrow P).$$

Postoji li disjunktivna normalna forma za zadanu formulu u kojoj se ne pojavljuje varijabla P ? Obrazložite svoj odgovor.

3. Neka je S skup formula logike sudova sa svojstvom da za svaku interpretaciju I takvu da je $I(S) = 1$ vrijedi $I(P_0) = 1 - I(P_1)$. Dokažite da tada postoji konačan podskup od S koji također ima navedeno svojstvo.
4. Neka su S i T skupovi formula logike sudova. Odredite odnos skupova $\mathcal{I}_S \cup \mathcal{I}_T$ i $\mathcal{I}_{S \cap T}$. Sve svoje tvrdnje dokažite.
5. Neka je S skup formula logike sudova. Dokažite da je S potpun ako i samo ako je S skup aksioma za svaki svoj konzistentan nadskup.
6. U sustavu prirodne dedukcije izvedite:

$$(a) (P \vee Q) \wedge (P \vee R) \vdash \neg P \rightarrow (Q \wedge R)$$

$$(b) \vdash \neg Q \vee (P \rightarrow Q)$$

7. Glavnim testom ispitajte vrijedi li

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \models \forall y(\exists x(P(y) \wedge R(y, x)) \rightarrow \exists x(Q(y) \wedge R(x, x))).$$

Ukoliko to ne vrijedi, navedite jednu strukturu koja to dokazuje.

8. Dokažite da je skup formula prvog reda

$$\left\{ \exists x \exists y R(x, y), \neg R(x, x), (R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z), \forall z (\neg R(x, z) \vee \neg R(z, y)) \rightarrow \neg R(x, y) \right\}$$

ispunjiv te da je svaki model koji to pokazuje beskonačan.