

Matematička logika – popravni kolokvij
18. veljače 2015.

Teorija

1. Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:
 - (a) (1 bod) dokaz u sistemu RS , te navedite jedan primjer dokaza;
 - (b) (1 bod) logički ekvivalentne formule u logici sudova;
 - (c) (1 bod) konzistentan skup formula logike sudova, te navedite tri primjera konzistentnih skupova formula;
 - (d) (1 bod) teorija prvog reda;
 - (e) (2 boda) izvod u sistemu prirodne dedukcije.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (a) (1 bod) Craigova interpolacijska lema;
 - (b) (1 bod) lema o istinitosti za sistem RS ;
 - (c) (1 bod) generalizirani teorem potpunosti za logiku sudova;
 - (d) (1 bod) teorem dedukcije za teorije prvog reda;
 - (e) (1 bod) navedite barem tri svojstva konzistentnih skupova u nekoj teoriji prvog reda;
 - (f) (1 bod) Löwenheim–Skolemov teorem ”na dolje”.
3. (4 boda) Neka je S neki skup formula logike sudova. Ako je svaki konačan podskup od S konzistentan u odnosu na sistem RS , dokažite da je tada nužno i skup S konzistentan.
4. (4 boda) Dokažite teorem potpunosti sistema prirodne dedukcije logike sudova.

Zadaci (svaki na svoj papir; svaki vrijedi 5 bodova)

1. Za formulu F logike sudova označimo s $|F|$ njenu duljinu (broj svih simbola u njoj, uključujući vanjske zagrade), a s $\kappa(F)$ njenu složenost. Dokažite da za svaku formulu F vrijedi

$$|F| \equiv \kappa(F) + 1 \pmod{3}.$$

2. Odredite (ako postoje) savršenu konjunktivnu i disjunktivnu normalnu formu za formulu

$$(Q \rightarrow P) \rightarrow (P \leftrightarrow (Q \wedge \neg R))$$

te ih pojednostavite do kraja.

3. Primjenom glavnog testa ispitajte je li skup

$$\{(P \leftrightarrow Q) \rightarrow R, \neg(P \rightarrow R) \vee (P \wedge Q)\}$$

oboriv. Ako jest, navedite jednu interpretaciju koja ga čini lažnim.

4. [U rješavanju ovog zadatka dokažite sve svoje tvrdnje.]
Dokažite: skup formula logike sudova je oboriv ako i samo ako je svaki njegov konačni podskup oboriv.
5. U sustavu prirodne dedukcije izvedite

$$P, \neg(P \leftrightarrow Q) \vdash \neg Q.$$

6. Neka je S skup formula logike sudova. Dokažite: ako je \mathcal{I}_S prebrojiv, tada i S mora biti prebrojiv.
7. Primjenom glavnog testa za logiku prvog reda ispitajte valjanost formule

$$\exists x (P(x) \rightarrow \forall y P(y)).$$

Ako formula nije valjana, nađite strukturu koja nije njen model.

8. Dokažite da

$$\exists y \neg (R(x, y) \rightarrow R(y, x)) \not\models \exists x \exists y \exists z (\neg R(x, y) \wedge R(x, z) \wedge R(z, y)),$$

ali je svaka struktura koja to pokazuje beskonačna.