

Teorija

- Definirajte sljedeće pojmove:
 - (1 bod) izvod u sistemu RS
 - (1 bod) potpun skup formula logike sudova
 - (1 bod) σ -struktura i σ -interpretacija
- Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (1 bod) Lindenbaumova lema za sistem RS
 - (1 bod) generalizirani teorem potpunosti za teorije prvog reda
 - (1 bod) Löwenheim-Skolemov teorem "na dolje"
- (4 boda) Dokažite da za sve formule F i G logike prvog reda vrijedi: $\forall x(F \wedge G) \Leftrightarrow \forall x F \wedge \forall x G$.

Zadaci

- Za proizvoljnu interpretaciju I označimo sa \mathcal{S}_I skup svih formula F takvih da je $I(F) = 1$. Mora li za sve interpretacije I i J postojati interpretacija K takva da je $\mathcal{S}_I \cup \mathcal{S}_J = \mathcal{S}_K$?
- Postoji li formula koja je istovremeno KNF i DNF za formulu $F := (P \rightarrow (P \leftrightarrow Q))$? Ako postoji, odredite je, i objasnite je li savršena kao KNF, te je li savršena kao DNF. Ako ne postoji, odredite savršene KNF i DNF za F .
- Dokažite da za svaku formulu F logike sudova postoji formula G u kojoj se ne pojavljuje veznik ' \neg ', takva da je $F \Leftrightarrow G$ ili $F \Leftrightarrow \neg G$.
- Primjenom glavnog testa odredite je li formula $((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg R)) \rightarrow (Q \leftrightarrow R)$ valjana. Ako formula nije valjana, odredite neku interpretaciju koja na njoj ima vrijednost 0.
- Neka je \mathcal{F} familija ispunjivih skupova logike sudova, takva da za sve $S, T \in \mathcal{F}$ postoji $U \in \mathcal{F}$ takav da je $S \cup T \subseteq U$. Dokažite da je skup $\bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$ ispunjiv.
- U sustavu prirodne dedukcije izvedite $P \vee Q \vdash (P \leftrightarrow Q) \rightarrow Q$.
- U sustavu prirodne dedukcije izvedite $(Q \rightarrow P) \rightarrow P \vdash P \vee Q$.
- Primjenom glavnog testa ispitajte valjanost formule

$$\forall x \forall y (\neg((R(x, y) \rightarrow \exists z P(x, z)) \vee \exists z (R(z, y) \leftrightarrow P(y, y)))) \rightarrow (\exists x \exists y (Q(x, y) \rightarrow P(x, y)) \rightarrow \forall z R(z, z)).$$
 Ako formula nije valjana, odredite neku strukturu koja nije njen model.
- Dokažite da svaki konačno aksiomatizabilan skup formula logike sudova ima nezavisan skup aksioma.
- Za $n \in \mathbb{N}$ neka je I_n interpretacija definirana sa $I_n(P_k) = 1$ ako je $k = n$, $I_n(P_k) = 0$ ako je $k \neq n$. Je li $\{I_{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ karakteristični skup interpretacija nekog skupa formula?