

Matematička logika – popravni kolokvij
22. veljače 2017.

Teorija

1. Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:
 - (a) (1 bod) potpun skup formula logike sudova, te navedite jedan primjer;
 - (b) (2 boda) dokaz u sistemu RS , te navedite tri primjera dokaza;
 - (c) (2 boda) istinitost formule neke teorije prvog reda za σ -intrerpretaciju;
 - (d) (1 bod) ispunjiva formula logike prvog reda, te navedite tri primjera formula koje nisu ispunjive;
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (a) (1 bod) Lindenbaumova lema za sistem RS ;
 - (b) (1 bod) generalizirani teorem potpunosti za logiku sudova;
 - (c) (1 bod) jaki teorem potpunosti za sistem PD ;
 - (d) (1 bod) teorem o preneksnoj normalnoj formi;
 - (e) (1 bod) teorem dedukcije za teorije prvog reda;
 - (f) (1 bod) navedite tri svojstva konzistentnih skupova u nekoj teoriji prvog reda.
3. (4 boda) Dokažite da za sve formule A i B logike sudova, pri čemu je A ispunjiva i B oboriva formula, te takve da vrijedi $\vdash_{PD} A \rightarrow B$, postoji formula C tako da vrijedi $Var(C) \subseteq Var(A) \cap Var(B)$, te $\vdash_{PD} A \rightarrow C$ i $\vdash_{PD} C \rightarrow B$.
4. (4 boda) Neka je T neka konzistentna teorija prvog reda, te S maksimalno konzistentan skup formula (tj. skup S je konzistentan u teoriji T , te ne postoji pravi nadskup od S koji je konzistentan). Dokažite da za sve formule F vrijedi: $S \vdash_T F$ ako i samo ako $F \in S$.

Zadaci (svaki na svoj papir; svaki vrijedi 5 bodova)

1. Dokažite da za svaku formulu F takvu da je $Var(F) \subseteq \{P, Q\}$ postoji polinom $p(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$, takav da za svaku interpretaciju I vrijedi

$$I(F) = p(I(P), I(Q)).$$

2. Odredite savršenu konjunktivnu i savršenu disjunktivnu normalnu formu za formulu

$$(P \leftrightarrow Q) \rightarrow P$$

te ih pojednostavite do kraja.

3. Glavnim testom za logiku sudova ispitajte vrijedi li

$$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow P \models P \wedge Q.$$

4. (a) Neka je A konačan skup formula logike sudova, te B beskonačan skup aksioma za A . Dokažite da postoji konačan podskup $C \subseteq B$ koji je također skup aksioma za A .

- (b) Mora li postojati takav C s dodatnim svojstvom $|C| \leq |A|$?
Obrazložite, te ako je odgovor negativan navedite kontraprimjer.

5. U sustavu prirodne dedukcije napišite izvod koji pokazuje

$$P \leftrightarrow Q \vdash P \vee \neg Q.$$

6. Jedan od aksioma teorije ZF je *aksiom partitivnog skupa*

$$\forall x \exists p \forall z (z \in p \leftrightarrow \forall t (t \in z \rightarrow t \in x)).$$

Ispitajte vrijedi li ta formula u strukturi $(\mathbb{Z}, >)$. Obrazložite odgovor.

7. Glavnim testom za logiku prvog reda ispitajte valjanost formule

$$\exists x (\exists y R(x, y) \leftrightarrow \forall y Q(z, x)).$$

Ako formula nije valjana, navedite neku $\{Q, R\}$ -strukturu koja nije njen model.

8. Dokažite da ne postoji konačan, ali postoji beskonačan, model za skup formula

$$\{R(x, y) \rightarrow (R(y, z) \rightarrow R(x, z)), \neg \forall x (R(x, y) \rightarrow R(y, x))\}.$$