

1. (a) Definirajte sljedeće pojmove:
 - i. (1 bod) savršena disjunktivna normalna forma
 - ii. (1 bod) istinitost formule za neku σ -interpretaciju
 - iii. (1 bod) dokaz u sistemu RP
 (b) Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - i. (1 bod) Lindenbaumova lema za logiku sudova
 - ii. (1 bod) generalizirani teorem potpunosti za logiku sudova
 - iii. (1 bod) Löwenheim–Skolemov teorem "na dolje"
 (c) (4 boda) Dokažite da je svaka instanca sheme aksioma $\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall xB)$, gdje formula A ne sadrži slobodnih nastupa varijable x , valjana formula.
2. Neka je F formula logike sudova koja ne sadrži veznike \rightarrow , \leftrightarrow i \neg . Dokažite da F nije ni tautologija ni antitautologija.
3. Nađite (neki) nezavisan skup aksioma za skup svih formula logike sudova. Dokažite da skup koji ste naveli ima tražena svojstva.
4. Odredite konjunktivnu normalnu formu formule $((P \rightarrow Q) \wedge (\neg Q \rightarrow P)) \vee (Q \wedge P)$.
5. Neka je S skup formula logike sudova takav da je svaki konačni podskup od S nezavisan. Dokažite da je S nezavisan.
6. Neka su I i J interpretacije takve da vrijedi $S_I \subseteq S_J$. Dokažite da je $I = J$. (Za proizvoljnu interpretaciju K sa S_K označavamo skup svih formula F takvih da je $K(F) = 1$.)
7. Neka je \mathcal{S} proizvoljan konačan skup interpretacija. Dokažite da postoji skup formula logike sudova T , takav da je $\mathcal{I}_T = \mathcal{S}$. (Sa \mathcal{I}_T označavamo karakteristični skup interpretacija skupa T , tj skup svih interpretacija I takvih da je $I(T) = 1$.)
8. Primjenom glavnog testa ispitajte ispunjivost formule

$$F \equiv ((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \wedge \neg(\neg P \rightarrow (Q \wedge R)).$$

Ako je F ispunjiva, odredite neku interpretaciju I takvu da je $I(F) = 1$.

9. Primjenom glavnog testa ispitajte valjanost formule

$$\exists x(Q(x) \vee R(x, x)) \rightarrow ((\forall y(\exists x P(y, x) \rightarrow \forall x R(x, y))) \vee \neg(\exists x \forall y R(x, y))).$$

Ako formula nije valjana, odredite neku strukturu koja nije njen model.

10. Odredite u sustavu prirodne dedukcije izvod

$$P \leftrightarrow Q, (P \wedge R) \vee \neg Q \vdash (Q \wedge R) \vee \neg P.$$

11. Neka je P dvomjesni relacijski simbol. Dokažite da je formula

$$\forall x \forall y \forall z \exists u \left(P(x, x) \wedge \neg P(x, u) \wedge \left((P(x, z) \wedge \neg P(y, z)) \rightarrow P(x, y) \right) \right)$$

ispunjiva, te da su joj svi modeli beskonačni.