

Matematička logika – popravni kolokvij
24. veljače 2022.

Teorija (rješenja pišite na odvojenim papirima od zadataka)

1. Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:
 - (a) (2 boda) relacija logičke posljedice u logici sudova te navedite primjer skupa formula S i formula A i B tako da vrijedi $S \models A$ i $S \not\models B$
 - (b) (2 boda) izvod u sistemu PD
 - (c) (2 boda) valuacija te navedite primjer valuacije v i dvije pripadne različite valuacije v_x
 - (d) (2 boda) Neka je $\sigma = \{R_1^1, R_2^1, R_1^2, f_1^1, c_1, c_2\}$. Napišite tri primjera σ -terma i tri primjera σ -formula.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (a) (1 bod) Lindenbaumova lema za sistem RS
 - (b) (1 bod) jaki teorem potpunosti za sistem PD
 - (c) (2 boda) generalizirani teorem potpunosti za teorije prvog reda, te definirajte sve pojmove koji se spominju u teoremu.
3. (4 boda) Dokažite da niti za jednu tautologiju ne postoji savršena konjunktivna normalna forma.
4. (4 boda) Neka je T neka konzistentna teorija prvog reda, te S maksimalno konzistentan skup formula (tj. skup S je konzistentan u teoriji T te ne postoji pravi nadskup od S koji je konzistentan). Dokažite da za sve formule F vrijedi: $S \vdash_T F$ ako i samo ako $F \in S$.

Zadaci (svaki vrijedi 5 bodova)

1. Postoje li interpretacije I i J takve da je $S_I \cap S_J$ jednak skupu svih tautologija? Sve svoje tvrdnje obrazložite.
2. Odredite jednu savršenu disjunktivnu normalnu formu za formulu

$$((Q \vee R) \wedge (P \leftrightarrow \neg R)) \rightarrow \neg Q.$$

3. Za formulu F neka je \mathcal{F} familija svih skupova formula S sa svojstvom $S \models F$. Dokažite da \mathcal{F} uvijek ima minimalni element s obzirom na inkluziju te da je svaki minimalni element u \mathcal{F} nužno konačan.
4. Dokažite da je skup formula S nezavisan ako i samo ako za svaki pravi podskup T od S vrijedi $\mathcal{I}_S \subsetneq \mathcal{I}_T$.
5. Ako je S konzistentan i potpun skup formula, dokažite da za svaku propozicionalnu varijablu postoji formula iz S u kojoj se ona pojavljuje.
6. U sustavu prirodne dedukcije izvedite:
 - (a) $\neg P \rightarrow (Q \wedge R) \vdash (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
 - (b) $\vdash (\neg(P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow (\neg P \vee Q)$
7. Glavnim testom ispitajte valjanost formule

$$\exists x(\neg P(x, x) \wedge (\exists y R(x, y) \leftrightarrow \forall z P(x, z))) \rightarrow \forall x \forall y \exists z (P(x, z) \rightarrow R(x, y)).$$

Ako formula nije valjana, navedite strukturu na kojoj je ona neistinita.

8. Dokažite da ne postoji konačan, ali postoji beskonačan model za skup formula

$$\{R(x, y) \leftrightarrow \exists z(R(x, z) \wedge R(z, y)), \neg(R(x, y) \wedge R(y, x)), \exists x \exists y R(x, y)\}.$$