

Teorija

- Definirajte sljedeće pojmove:
 - (1 bod) stablo, te navedite jedan primjer
 - (2 boda) izvod u sistemu PD
- Iskažite sljedeće tvrdnje:
 - (1 bod) generalizirani teorem potpunosti za logiku sudova
 - (1 bod) Gödelov teorem potpunosti
 - (1 bod) Löwenheim–Skolemov teorem "na dolje"
- (4 boda) Dokažite teorem potpunosti za sistem prirodne dedukcije za logiku sudova.

Zadaci (svaki na svoj papir; svaki zadatak vrijedi 5 bodova)

- Neka je F formula logike sudova u kojoj ima a pojava simbola za bikondicional, te b pojava simbola za negaciju (ostali logički veznici se ne pojavljuju). Neka je J interpretacija koja sve propozicionalne varijable preslika u 1. Dokažite da $J(F)$ ovisi samo o a i b , te odredite kako.
- Odredite savršenu disjunktivnu normalnu formu za formulu

$$(P \wedge Q \wedge R) \leftrightarrow \neg(Q \rightarrow P),$$

te po jednu konjunktivnu i disjunktivnu normalnu formu za istu formulu koje nisu savršene.

- Može li savršena konjunktivna normalna forma s dvije varijable imati složenost jednaku:
 - 3; (b) 7; (c) 10? Za svaki od tih brojeva navedite primjer, ili dokaz da ne može.
- Primjenom glavnog testa odredite je li formula $((P \vee Q) \wedge (P \vee R)) \rightarrow (\neg P \rightarrow (Q \wedge R))$ valjana. Ako formula nije valjana, odredite neku interpretaciju koja na njoj ima vrijednost 0.
- Za interpretaciju I označimo sa S_I skup svih formula F takvih da je $I(F) = 1$. Za koje od sljedećih skupova formula T postoji interpretacija I takva da je $T \cap S_I = \emptyset$:
 - $T = \{P_0, P_2 \rightarrow P_1, \neg P_1\}$; (b) $T = \{P_0, P_1, P_2, \dots\}$; (c) $T = \{P_i \rightarrow P_{i+1} \mid i \in \mathbf{N}\}$? Obrazložite svoje tvrdnje.
- Neka je $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ niz skupova formula logike sudova takav da za svaki $n \in \mathbf{N}$ postoji interpretacija I takva da je $I(F) = 0$ za svaki $F \in S_n$ te takav da za sve $i, j \in \mathbf{N}$ postoji $n \in \mathbf{N}$ sa svojstvom da je $S_i \cup S_j \subseteq S_n$. Dokažite da postoji interpretacija I takva da je $I(F) = 0$ za svaki $F \in \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_n$.
- Za skup formula S označimo sa I_S skup svih interpretacija I takvih da je $I(S) = 1$. Za koji od sljedećih skupova formula S postoji skup formula T takav da je $I_S = (I_T)^c$:
 - $S = \{P_0\}$; (b) $S = \{P_0, P_1, P_2\}$; (c) $S = \{F \mid F \text{ valjana formula}\}$? Obrazložite svoje tvrdnje.
- U sustavu prirodne dedukcije izvedite $(P \vee \neg Q) \wedge (\neg P \rightarrow Q) \vdash P$.
- Primjenom glavnog testa ispitajte ispunjivost formule

$$\left((\forall x \forall y (Q(x) \wedge R(x, y)) \rightarrow \exists x \exists z (P(x, x) \vee R(z, z))) \rightarrow (\neg \exists x \exists y P(x, y) \wedge \forall z Q(z)) \right) \wedge \exists x (P(x, x) \vee \neg Q(x)).$$

Ako je formula ispunjiva, odredite neku strukturu koja je njen model.

- Dokažite da je skup formula prvog reda

$$\{\exists y Rxy, \neg(Rxy \wedge Ryx), (Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz\}$$

ispunjiv, te da glavni test kojim bismo to pokušali pokazati mora imati beskonačnu granu.