

**Matematička logika – popravni kolokvij**  
**20. veljače 2019.**

**Teorija**

1. Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:
  - (a) (1 bod) ispunjiva formula i oboriva formula logike sudova, te navedite po jedan primjer;
  - (b) (1 bod) teorem sistema  $RS$ , te navedite primjer teorema sistema  $RS$  koji sadrži barem tri propozicionalne varijable;
  - (c) (2 boda) navedite dva primjera dokaza u sistemu  $PD$ ;
  - (d) (2 boda) alfabet neke teorije prvog reda
  - (e) (2 boda) nelogički aksiom neke teorije prvog reda, te navedite dva nelogička aksioma Peanove aritmetike.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (a) (1 bod) Craigova interpolacijska lema;
  - (b) (1 bod) jaki teorem potpunosti za sistem  $PD$ ;
  - (c) (1 bod) lema o proširenju valuacije na skup svih terma;
  - (d) (1 bod) Churchov teorem.
3. (4 boda) Dokažite da za svaku ispunjivu formulu postoji savršena disjunktivna normalna forma.
4. (4 boda) Neka je  $T$  neka teorija prvog reda. Neka je  $S$  konzistentan skup formula u teoriji  $T$ , te neka je  $F$  neka formula za koju vrijedi  $S \vdash_T F$ . Dokažite da je tada skup formula  $S \cup \{F\}$  konzistentan u teoriji  $T$ .

## Zadaci (svaki vrijedi 5 bodova)

1. Neka je  $F$  formula logike sudova. Označimo s  $a$  broj pojava veznika  $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  u  $F$  te s  $b$  broj pojava propozicionalnih varijabli u  $F$ . Dokažite da je  $b = a + 1$ .
2. Neka je  $F$  formula logike sudova za koju postoji savršena konjunktivna normalna forma. Dokažite da je formula  $F$  oboriva.
3. Glavnim testom za logiku sudova ispitajte vrijedi li

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow (R \vee \neg Q) \models P \rightarrow R.$$

Ukoliko to ne vrijedi, navedite interpretaciju koja to pokazuje.

4. Neka je  $T$  skup formula logike sudova sa svojstvom da za svaku interpretaciju  $I$  vrijedi  $S_I \cap T \neq \emptyset$ . Dokažite da tada postoje formule  $F_1, \dots, F_n \in T$  takve da je  $F_1 \vee \dots \vee F_n$  tautologija.
5. Neka su  $S_1$  i  $S_2$  potpuni skupovi formula logike sudova takvi da je  $S_1 \cup S_2$  konzistentan skup formula. Dokažite da je tada  $\mathcal{I}_{S_1} = \mathcal{I}_{S_2}$ .
6. U sustavu prirodne dedukcije izvedite

$$Q \leftrightarrow ((Q \rightarrow P) \vee \neg P) \vdash Q.$$

7. Glavnim testom za logiku prvog reda ispitajte ispunjivost formule

$$\exists x \forall y (P(x, y) \wedge \neg R(y, y)) \wedge \exists x (\neg R(x, x) \rightarrow (\exists y P(x, y) \leftrightarrow \forall z R(x, z))).$$

Ako je formula ispunjiva, navedite neku strukturu koja je njen model.

8. Dokažite da formula  $\exists x \exists y (R(x, y) \wedge R(y, x))$  nije logička posljedica skupa formula

$$\{(R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z), \exists y R(x, y) \wedge \exists y R(y, x)\}$$

te da je svaki model koji to pokazuje beskonačan.