

**Matematička logika – popravni kolokvij**  
**17. veljače 2016.**

**Teorija**

1. Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:
  - (a) (1 bod) savršena disjunktivna normalna forma;
  - (b) (2 boda) izvod u sistemu  $RS$ , te navedite dva primjera izvoda;
  - (c) (2 boda) istinitost formule neke teorije prvog reda za  $\sigma$ -intrerpretaciju;
  - (d) (1 bod) term neke teorije prvog reda, te navedite tri primjera.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (a) (1 bod) teorem o normalnim formama u logici sudova;
  - (b) (1 bod) jaki teorem potpunosti za sistem  $RS$ ;
  - (c) (1 bod) teorem adekvatnosti za sistem  $PD$ ;
  - (d) (1 bod) teorem o preneksnoj normalnoj formi;
  - (e) (1 bod) teorem dedukcije za teorije prvog reda;
  - (f) (1 bod) Löwenheim–Skolemov teorem ”na dolje”.
3. (4 boda) Za konzistentan skup  $S$  formula logike sudova kažemo da je maksimalno konzistentan ako ne postoji konzistentan skup formula  $S'$  koji je pravi nadskup od  $S$ . Neka je  $S$  maksimalno konzistentan skup formula. Dokažite da za svaku formulu  $F$  vrijedi:  $F \in S$  ako i samo ako  $\neg F \notin S$ .
4. (4 boda) Dokažite da je svaka sudovno valjana formula ujedno i valjana.

## Zadaci (svaki na svoj papir; svaki vrijedi 5 bodova)

1. Za formulu  $F$  logike sudova, sa  $\#F$  označimo duljinu (broj pojava svih simbola, uključujući vanjske zagrade) od  $F$ , a sa  $\#\neg F$  broj pojava simbola  $\neg$ . Dokažite indukcijom po izgradnji formula da za svaku formulu  $F$  vrijedi

$$\#F \equiv \#\neg F + 1 \pmod{4}.$$

2. Nađite (ili obrazložite zašto ne postoje) savršenu konjunktivnu i savršenu disjunktivnu normalnu formu za formulu

$$(Q \leftrightarrow \neg P) \wedge \neg(P \vee Q).$$

3. Neka je  $S$  skup (nekih) ispunjivih formula logike sudova, zatvoren na konjunkcije (za  $F, G \in S$  je i  $(F \wedge G) \in S$ ). Dokažite da je  $S$  ispunjiv skup. Navedite primjer koji pokazuje da je zatvorenost na konjunkcije nužna.

4. Glavnim testom za logiku sudova ustanovite je li formula

$$(P \leftrightarrow (Q \rightarrow P)) \leftrightarrow (P \vee R)$$

valjana, te ako nije, navedite interpretaciju pod kojom je lažna.

5. U sustavu prirodne dedukcije dokažite formulu

$$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R).$$

6. Neka su  $A$  i  $B$  skupovi formula logike sudova takvi da nije  $A \subseteq B$ , niti je  $B \subseteq A$ . Usporedite skupove

$$\mathcal{I}_{A \setminus B} \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_A \setminus \mathcal{I}_B :$$

svaku inkluziju dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom.

7. Glavnim testom za logiku prvog reda nađite (ako postoji)  $\{R\}$ -strukturu u kojoj je istinita formula

$$\exists x \exists y \neg \exists z (R(x, y, z) \rightarrow R(y, z, x)).$$

8. Dokažite da je svaka konačna struktura model za formulu

$$\exists x \forall y \exists z ((R(y, z) \rightarrow R(x, z)) \rightarrow (R(x, x) \rightarrow R(y, x))).$$