

**Teorija**

- Definirajte sljedeće pojmove, te navedite primjere gdje se traži:
  - (1 bod) formula logike sudova;
  - (1 bod) konzistentan skup formula, te navedite tri primjera konzistentnih skupova formula;
  - (1 bod) potpun skup formula logike sudova, te navedite dva primjera potpunih skupova formula;
  - (1 bod) term neke teorije prvog reda;
  - (2 boda)  $\sigma$ -struktura i  $\sigma$ -interpretacija.
- Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (1 bod) teorem kompaktnosti za logiku sudova;
  - (1 bod) Lindenbaumova lema za sistem  $RS$ ;
  - (1 bod) jaki teorem potpunosti za sistem  $PD$ ;
  - (1 bod) teorem dedukcije za teorije prvog reda;
  - (1 bod) generalizirani teorem potpunosti za teorije prvog reda;
  - (1 bod) teorem kompaktnosti za logiku prvog reda;
- (4 boda) Dokažite Craigovu interpolacijsku lemu.
- (4 boda) Dokažite da je svaka sudovno valjana formula logike prvog reda valjana.

**Zadaci (svaki na svoj papir; svaki zadatak vrijedi 5 bodova)**

- Neka je  $F$  formula logike sudova u kojoj se ne pojavljuju veznici  $\wedge, \vee$  niti  $\rightarrow$ , te neka je  $N$  nul-interpretacija ( $N(P_i) := 0$  za sve  $i$ ). Dokažite da  $N(F)$  ovisi samo o  $\kappa(F)$ , i odredite kako.
- Pomoću tablice istinitosti dokažite da su formule  $(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P$  i  $\neg(Q \rightarrow P)$  ekvivalentne, te napišite savršenu konjunktivnu normalnu formu za njih.
- Primjenom glavnog testa ispitajte valjanost formule  $((Q \vee R) \rightarrow (P \vee \neg(Q \leftrightarrow R))) \rightarrow (P \vee \neg Q)$ . Ako formula nije valjana, odredite neku interpretaciju koja na toj formuli ima vrijednost 0.
- Za interpretaciju  $I$  označimo sa  $S_I$  skup svih formula  $F$  takvih da je  $I(F) = 1$ . Neka su  $I$  i  $J$  interpretacije. Dokažite da je  $S_I \cup S_J$  ispunjiv skup ako i samo ako je  $I = J$ .
- U sustavu prirodne dedukcije izvedite  $(P \wedge Q) \rightarrow R \vdash (P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)$ .
- Neka je  $S$  konačan skup formula, a  $T$  konačan skup interpretacija. Dokažite: ako postoji  $I \in T$  za koju je  $I(S) = 1$ , tada postoji i  $J \notin T$  za koju je  $J(S) = 1$ . Vrijedi li to ako je  $T$  prebrojiv skup?
- Primjenom glavnog testa ispitajte ispunjivost formule

$$\exists x \exists y ((R(x, y) \rightarrow P(x, y)) \rightarrow \forall z P(z, z)) \wedge \neg(\forall x \forall y ((R(x, y) \vee \exists z P(x, z)) \vee \forall z (R(z, y) \rightarrow P(y, y)))).$$

Ako je formula ispunjiva, odredite neku strukturu koja je njen model.

- Dokažite da ne postoji konačan model za formulu

$$\exists x (\exists y R(y, x) \wedge \forall y (R(y, x) \rightarrow \exists z R(z, y))) \wedge \forall x \forall y \forall z ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \rightarrow R(x, z)) \wedge \forall x (\neg R(x, x)).$$

Dokažite da je ova formula ispunjiva.