

Teorija:

1. Definirajte sljedeće pojmove i **navedite po jedan primjer**:
  - (a) (1 bod) oboriva formula;
  - (b) (1 bod) logički ekvivalentne formule;
  - (c) (1 bod) potpun skup formula.
2. Iskažite sljedeće tvrdnje:
  - (a) (1 bod) Craigova interpolacijska lema;
  - (b) (1 bod) teorem dedukcije za sistem  $RS$ ;
  - (c) (1 bod) teorem kompaktnosti.
3. (4 boda) Neka je  $S$  skup formula logike sudova za koji postoji točno jedna interpretacija  $I$  tako da vrijedi  $I(S) = 1$ . Dokažite da je skup  $S$  konzistentan i potpun.

Zadaci:

1. Odredite po jednu konjunktivnu i disjunktivnu normalnu formu za formulu

$$((P \vee Q) \wedge R) \leftrightarrow ((P \leftrightarrow R) \rightarrow (\neg P \rightarrow Q)).$$

2. Primjenom glavnog testa ispitajte ispunjivost formule

$$\left( (P \vee R) \vee (\neg Q \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)) \right) \rightarrow \left( (Q \wedge R) \leftrightarrow (\neg Q \vee \neg R) \right).$$

Ako je formula ispunjiva, odredite neku interpretaciju koja na toj formuli ima vrijednost 1.

3. Neka je  $S$  konačan skup formula logike sudova te neka su  $S_1$  i  $S_2$  podskupovi od  $S$  takvi da su i  $S_1$  i  $S_2$  nezavisni skupovi aksioma za  $S$ . Pretpostavimo da je  $S_1 \subseteq S_2$ . Dokažite da je  $S_1 = S_2$ .
4. Neka je  $A$  ispunjiv skup formula logike sudova. Dokažite:

$$\{F : A \models F\} = \bigcap_{I \in \mathcal{I}_A} S_I.$$

(Ovdje  $\mathcal{I}_A$  označava skup svih interpretacija  $I$  takvih da je  $I(A) = 1$ , a za  $I \in \mathcal{I}_A$  sa  $S_I$  označavamo skup svih formula  $F$  takvih da je  $I(F) = 1$ .) Je li pretpostavka da je  $A$  ispunjiv nužna?

5. Neka je  $A$  zavisan skup formula logike sudova. Dokažite da postoji  $n \in \mathbb{N}$  i različite formule  $F_1, \dots, F_n \in A$ , takve da je formula

$$F_1 \rightarrow \left( F_2 \rightarrow \left( F_3 \rightarrow \dots (F_{n-1} \rightarrow F_n) \dots \right) \right)$$

tautologija.