

Teorija (sve na jedan papir)

1. Definirajte sljedeće pojmove i **navedite primjere gdje se traži**:

- (a) (1 bod) oboriva formula, te navedite tri primjera oborivih formula koje sadrže samo veznike \wedge i \vee ;
- (b) (1 bod) savršena konjunktivna forma; postoji li savršena konjunktivna forma za formulu $(P \rightarrow P) \vee (\neg Q \vee P \vee Q)$?
- (c) (1 bod) potpuni skup formula, te navedite jedan primjer potpunog beskonačnog inkonzistentnog skupa formula.

2. Iskažite sljedeće tvrdnje:

- (a) (1 bod) teorem dedukcije sistema RS , te navedite primjer skupa formula $S \neq \emptyset$ i formula A i B tako da vrijedi $S \cup \{A\} \vdash B$ i $S \not\vdash B$;
 - (b) (1 bod) tri svojstva inkonzistentnih skupova;
 - (c) (1 bod) teorem kompaktnosti.
3. (4 boda) Za skup formula S kažemo da je maksimalno konzistentan ako je konzistentan i za svaku formulu $F \notin S$ vrijedi da je skup $S \cup \{F\}$ inkonzistentan. Dokažite da je svaki maksimalno konzistentan skup formula potpun. Je li svaki potpun i konzistentan skup formula nužno maksimalno konzistentan (dokažite ili odredite protuprimjer)?

Zadaci (svaki po 4 boda):

- 1. Za interpretaciju I sa S_I označavamo skup svih formula F takvih da je $I(F) = 1$. Dokažite da skup S_I nije konačno aksiomatizabilan za niti jednu interpretaciju I .
- 2. (a) Odredite savršenu konjunktivnu normalnu formu za formulu

$$(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow R).$$

- (b) Neka su A_1, \dots, A_n elementarne konjunkcije takve da je $A_1 \vee \dots \vee A_n$ savršena disjunktivna normalna forma. Dokažite da za svaku interpretaciju I i sve $i \in \{1, \dots, n\}$, ako je $I(A_i) = 1$, onda $I(A_j) = 0$ za sve $j \neq i$.

3. Primjenom glavnog testa ispitajte oborivost formule

$$((Q \wedge R) \wedge (P \vee \neg(Q \leftrightarrow R))) \rightarrow (P \wedge \neg Q).$$

Ako je formula oboriva, odredite neku interpretaciju koja to dokazuje.

- 4. Za skup formula S kažemo da je *šaren* ako za svaku interpretaciju I postoje formule $F, G \in S$ takve da je $I(F) \neq I(G)$. Dokažite da svaki šaren skup formula ima konačan šaren podskup.
- 5. Dokažite da je beskonačan nezavisan skup formula konzistentan.