Hindmanov teorem

Božidar Grgur Drmić, Mladen Vuković

Sažetak. Američki matematičar Neil Hindman je 1974. godine dokazao sljedeći teorem: ako je skup $\mathbb{N}$ obojan s konačno mnogo boja tada postoji beskonačan podskup od $\mathbb{N}$ čiji je pripadni skup svih parcijalnih suma obojan istom bojom. U ovom članku prezentiramo dokaz koji je objavljen zadnjih godina a uključuje topologiju i teoriju skupova.

Ključni pojmovi: *parcijalna suma, filter, ultrafilter, kompaktan Hausdorffov topološki prostor*

U ovom članku dajemo skicu dokaza jednog teorema čija je tvrdnja, barem po našem skromnom mišljenju, na prvi pogled pomalo nevjerojatna. Smatramo da je i vrlo zanimljiv dokaz teorema jer uključuje nekoliko područja matematike: teoriju brojeva, kombinatoriku, teoriju skupova i topologiju.

Prije iskaza samog teorema navest ćemo neke primjere kao motivaciju. Prvo želimo objasniti pojam skupa S_B svih parcijalnih suma nekog zadanog podskupa B od $\mathbb{N}$. Neka je, primjerice, $B = \{1, 2, 3\}$. Sve parcijalne sume elemenata skupa B su sljedeće: $1, 2, 3, 1 + 2, 1 + 3, 2 + 3, 1 + 2 + 3$. Tada je $S_B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Očito je skup svih parcijalnih suma skupa $2\mathbb{N}$ jednak njemu samom, tj. $2\mathbb{N}$. Naravno, nije uvijek tako lako odrediti skup svih parcijalnih suma zadanog skupa. No, tim pitanjem se nećemo baviti u ovom članku.

Zamislimo sada da je skup $\mathbb{N}$ obojan s konačno mnogo boja (zadano je konačno mnogo boja te je svaki prirodan broj obojan točno s jednom bojom). Može se postaviti pitanje postoji li neki podskup od $\mathbb{N}$ koji ima određeno svojstvo u odnosu na bojenje. Jedan težak problem te vrste vezan je uz Pitagorine trojke[1]. Za zadani prirodan broj n postavlja se pitanje postoji li bojanje skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ s tri boje tako da niti jedna Pitagorina trojka nije obojana istom bojom.[2]

Opišimo sada problem kojim ćemo se baviti u ovom članku. Pretpostavimo da je skup $\mathbb{N}$ obojan s konačno mnogo boja. Postavlja se pitanje postoji li beskonačan podskup od $\mathbb{N}$ tako da je skup svih njegovih parcijalnih suma obojan istom bojom (kažemo da je skup svih parcijalnih suma monokromatski). Čudno pitanje a još čudniji odgovor. Američki matematičar Neil Hindman je 1974. godine dokazao da za svako konačno bojanje postoji beskonačan podskup B od $\mathbb{N}$ tako da je skup S_B svih njegovih parcijalnih suma monokromatski (vidi [3]).

Hindman je u svom članku dao kombinatorni dokaz. Mi ćemo u ovom članku dati dokaz Hindmanovog teorema koristeći ultrafiltre i topologiju na prostoru ultrafiltera. Neke ćemo detalje izostaviti, ali ćemo ih vrlo jasno istaknuti. Potpun dokaz možete vidjeti primjerice u knjizi [4] ili pak u diplomskom radu [2].

1 Filtri i ultrafiltri

U članku ćemo često koristiti pojam *familija skupova*. To su jednostavno skupovi čiji su elementi također skupovi (ne govorimo "skup skupova" već "familija skupova"). Primjerice, partitivni skup $\mathcal{P}(A)$, tj. skup svih podskupova nekog skupa A, jedan je primjer familije skupova. U ovoj točki razmatramo familije skupova koje se nazivaju filtri i ultrafiltri. Osim njihovih definicija navest ćemo neke primjere te osnovne činjenice o njima. Sve detalje možete pronaći u [5] odnosno [6].

Neka je X neki neprazan skup. Neprazna familija $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ je **filter** nad skupom X ako $\emptyset \notin \mathcal{F}$, zatim za svaki $A \in \mathcal{F}$ i svaki $B \supseteq A$ vrijedi $B \in \mathcal{F}$ te za sve $A, B \in \mathcal{F}$ imamo $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Ako je $\mathcal{F}$ neki filter nad skupom X te je $n \in \mathbb{N}$ i $A_1, \ldots A_n \in \mathcal{F}$ tada je nužno $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$ (probajte to dokazati matematičkom indukcijom). Iz tog razloga još kažemo da je svaki filter **zatvoren na konačne presjeke**.

Neka je $X \neq \emptyset$ i $\emptyset \neq A \subseteq X$ proizvoljan. Lako je vidjeti da je $\{B \in \mathcal{P}(X) : B \supseteq A\}$ primjer jednog filtra. Zatim, ako je X beskonačan skup tada je $\{A \subseteq X : X \setminus A \text{ konačan}\}$ filter. Taj filter se naziva **Fréchetov filter** nad skupom X. Zainteresiranom čitatelju preporučamo da svakako detaljno raspiše prethodne primjere.

Posebno nas zanimaju filtri koji su maksimalni, tj. oni koji se ne mogu proširiti do većeg filtra. **Ultrafilter** U nad skupom X je filter koji ima svojstvo da za svaki $A \subseteq X$ vrijedi: $A \in U$ ako i samo ako $X \setminus A \notin U$. Može se pokazati da su ultrafiltri upravo oni filtri koji su maksimalni obzirom na relaciju inkluzije.

Ako je $X \neq \emptyset$ i $a \in X$ proizvoljan, tada je $\{Y \subseteq X : a \in Y\}$ primjer jednog ultrafiltra. Svaki ultrafilter takvog oblika naziva se **glavni ultrafilter** i označava sa X_a.

Prirodno se nameće pitanje može li se svaki filter proširiti do ultrafiltra, tj. postoji li za svaki filter neki ultrafilter koji ga sadrži. Odgovor je potvrdan. Za dokaz te tvrdnje koristi se Zornova lema[3] pa ga ovdje ispuštamo. No, budući da nam je ta tvrdnja jako važna za daljnja razmatranja iskazujemo je u formi teorema.

[1] Za trojku $x, y, z \in \mathbb{N}$ kažemo da je Pitagorina trojka ako vrijedi $x^2 + y^2 = z^2$. Primjerice, brojevi 3,4 i 5 čine jednu Pitagorinu trojku.

[2] Više o tom problemu možete čitati u [1]. Dokazano je da traženo bojenje postoji za $n = 7\,824$, a za $n = 7\,825$ je dokazano da traženo bojenje ne postoji. Zanimljivo je da se je za dokaz bitno koristilo računalo, tj. koristili su se automatski dokazivači teorema.

[3] Zornova lema glasi: ako je $(A, <)$ neprazan parcijalno uređen skup koji ima svojstvo da za svaki njegov linearno uređen podskup postoji gornja međa, tada skup A sadrži maksimalni element. Zornova lema ekvivalentna je aksiomu izbora. Više o tome možete čitati u [7].

Teorem 1. *Za svaki filter $\mathcal{F}$ postoji ultrafilter U tako da vrijedi $\mathcal{F} \subseteq U$.*

Sada ističemo jedno osnovno svojstvo ultrafiltra te ga dokazujemo.

Propozicija 1. *Neka je U ultrafilter nad skupom X. Zatim, neka je familija skupova $\{A_1, \dots, A_n\}$ particija skupa X, tj. $X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ te je svaki skup A_i neprazan i skupovi su u parovima disjunktni. Tada postoji jedinstveni $i \in \{1, \dots, n\}$ tako da imamo $A_i \in U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ vrijedi $A_i \notin U$. Tada imamo da za svaki i vrijedi $A_i^c \in U$. Iz zatvorenosti ultrafiltera na konačne presjeke slijedi $A_1^c \cap \dots \cap A_n^c \in U$, a onda i $\emptyset = \mathbb{N}^c = (A_1 \cup \dots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \dots \cap A_n^c \in U$, što je suprotno definiciji ultrafiltra.

Ako bi postojali različiti $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tako da vrijedi $A_i, A_j \in U$ tada bismo opet primjenom zatvorenosti ultrafiltra na konačne presjeke dobili $A_i \cap A_j \in U$. No, bili smo pretpostavili da familija skupova $\{A_1, \dots, A_n\}$ sadrži u parovima disjunktne skupove, pa imamo $\emptyset = A_i \cap A_j \in U$, što je opet suprotno uvjetu iz definicije ultrafiltera. Q.E.D.

Za dokaz Hindmanovog teorema trebat će nam ultrafiltri koji sadrže samo beskonačne skupove. U vezi toga ističemo još sljedeću propoziciju.

Propozicija 2. *Ultrafilter je glavni ako i samo ako sadrži neki konačan skup.*

Dokaz. Uočimo da je jedan smjer trivijalan. Glavni ultrafilter X_a, gdje je $a \in X$, sadrži jednočlan, a time i konačan skup $\{a\}$.

Pokažimo i drugi smjer. Neka je U ultrafilter koji sadrži neki konačan skup S. Kako je skup S konačan tada postoji $A \subseteq S$, $A \in U$, koji je minimalan u odnosu na broj elemenata. Lako se vidi da je $U = \{Y \subseteq X : A \subseteq Y\}$ (detaljno raspišite to). Neka je $a \in A$ proizvoljan. Glavni ultrafilter $X_a = \{Y \subseteq X : a \in Y\}$ očito je nadskup od U jer je $A \in X_a$. Kako je U ultrafilter, znamo da se ne može proširiti do većeg filtra pa zaključujemo da je $X_a = U$, tj. U je glavni ultrafilter. Q.E.D.

Jednostavna direktna posljedica prethodne propozicije je da ultrafilter nije glavni jedino u slučaju kada je proširenje Fréchetovog filtra. Stoga na svakom beskonačnom skupu postoji ultrafilter koji nije glavni. Naime, na beskonačnom je skupu uvijek moguće konsturirati Fréchetov filter i proširiti ga do ultrafiletra. Takav ultrafilter nije glavni.

Zadatak 1. Dokažite sljedeće tvrdnje.

a) Neka je $X \neq \emptyset$ i $A \subseteq X$ proizvoljan neprazan podskup. Tada je familija skupova $\{B \in \mathcal{P}(X) : B \supseteq A\}$ filter.

b) Neka je X neki beskonačan skup. Tada je familija skupova $\{A \subseteq X : X \setminus A \text{ je konačan skup}\}$ filter.

c) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nepraznih podskupova nekog skupa X takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $A_{n+1} \subseteq A_n$. Tada je familija skupova $\{Y \subseteq X : (\exists n \in \mathbb{N})\, A_n \subseteq Y\}$ filter.

d) Svaki ultrafilter je maksimalni filter u odnosu na inkluziju.

e) Neka je $X \neq \emptyset$ i $a \in X$ proizvoljan. Tada je familija skupova $X_a = \{Y \subseteq X : a \in Y\}$ ultrafilter.

f) Ultrafilter U nad beskonačnim skupom nije glavni ako i samo ako je ultrafilter U nadskup Fréchetovog filtra.

2 (Vrlo) malo o topološkim prostorima

Za daljnja razmatranja treba nam nekoliko osnovnih topoloških pojmova. Promatrat ćemo prostor svih ultrafiltera nad skupom $\mathbb{N}$. Taj prostor je kompaktan Hausdorffov topološki prostor. Ako je čitatelj upoznat s osnovnim pojmovima iz topologije tada slobodno može preskočiti ovu točku. Mi smo se odlučili da ovdje ipak stavimo definicije pojmova iz topologije koje koristimo.

Neka je X skup i τ neka familija podskupova od X. Kažemo da je τ **topologija** nad skupom X ako je $X, \emptyset \in \tau$ te ako je familija τ zatvorena na proizvoljne unije i konačne presjeke. Tada uređeni par (X, τ) nazivamo **topološki prostor**, a elemente topologije zovemo **otvorenim** skupovima. Skupove čiji su komplementi otvoreni nazivamo **zatvorenim** skupovima.

Još jedan ključan topološki pojam je pojam kompaktnog skupa. U tu svrhu prvo definiramo pojam pokrivača. Neka je (X, τ) neki topološki prostor. Familiju O nazivamo **otvorenim pokrivačem** nekog skupa $A \subseteq X$ ako O sadrži samo otvorene skupove i ako je $\bigcup_{O\in O} O \supseteq A$, tj. ako unija njegovih elemenata pokriva zadani skup. Podskup od O koji je i sam pokrivač skupa A nazivamo **potpokrivačem**. Skup čiji se svaki otvoreni pokrivač može reducirati do konačnog potpokrivača zovemo **kompaktnim skupom**. Kažemo da je topološki prostor (X, τ) **kompaktan topološki prostor** ako je skup X kompaktan.

Neka je (X, τ) neki topološki prostor te $f : X \to X$ funkcija. Za funkciju f kažemo da je **neprekidna** ako za svaki otvoreni skup $O \in \tau$ vrijedi da je praslika $f^{-1}[O] = \{x \in X : f(x) \in O\}$ također otvoreni skup.

Navedena definicija topologije govori nam što su otvoreni skupovi i koja svojstva moraju zadovoljavati, no ne i "koliko" ih ima. Primjerice, nije jasno postoje li za proizvoljne $x, y \in X$ otvoreni disjunktni skupovi A i B takvi da je $x \in A$, a $y \in B$. Ovo svojstvo zovemo svojstvom separacije, a topološke prostore koji ga zadovoljavaju **Hausdorffovim** topološkim prostorima. Na Hausdorffovim prostorima vrijede mnoga dobra svojstva, no nama je od posebnog interesa svojstvo da su svi kompaktni skupovi ujedno i zatvoreni.

Zadatak 2. Neka je (X, τ) topološki prostor. Dokažite sljedeće tvrdnje.

a) Proizvoljan presjek zatvorenih skupova je zatvoren skup.

b) Unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.

c) Ako je $f : X \to X$ neprekidna funkcija i $A \subseteq X$ zatvoren podskup tada je skup $f^{-1}[A] = \{x : f(x) \in A\}$ također zatvoren skup.

d) Ako je $f : X \to X$ neprekidna funkcija i $A \subseteq X$ kompaktan podskup tada je skup $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$ također kompaktan skup.

e) Podskup Hausdorffovog topološkog prostora je zatvoren ako i samo ako je kompaktan.

Sada ističemo drugu važnu tvrdnju koja nam treba za dokaz Hindmanovog teorema, a koju nećemo dokazivati. U zadatcima iza teorema istaknut ćemo najvažnije dijelove koji trebaju za dokaz teorema. Prije samog iskaza teorema uvodimo dvije oznake. Neka je $X \neq \emptyset$. Sa $\mathcal{U}(X)$ označavamo skup svih ultrafiltera nad skupom X. Zatim, za svaki $A \subseteq X$ definiramo $\langle A \rangle = \{U \in \mathcal{U}(X) : A \in U\}$, tj. $\langle A \rangle$ je skup svih ultrafiltera koji sadrže skup A.

Teorem 2. *Neka je X neprazan skup i neka je τ familija svih podskupova od $\mathcal{U}(X)$ koji su unije skupova oblika $\langle A \rangle$, gdje je $A \subseteq X$. Tada je $(\mathcal{U}(X), \tau)$ kompaktan Hausdorffov topološki prostor.*

Zadatak 3. Neka je $X \neq \emptyset$ i neka su $A, B \subseteq X$ proizvoljni. Dokažite sljedeće tvrdnje.

a) $\langle A \cap B \rangle = \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$

b) Ako $A \subseteq B$ onda $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$.

c) $\langle X \setminus A \rangle = \mathcal{U}(X) \setminus \langle A \rangle$

3 Operator $\oplus$ i idempotentni ultrafiltri

U ovom odjeljku uvest ćemo poseban operator na topološkom prostoru ultrafiltera te pokazati da postoji idempotentan ultrafilter s obzirom na taj operator. Upravo takav ultrafilter koristit ćemo u dokazu Hindmanovog teorema. Prvo uvedimo nekoliko oznaka.

Za $A \subseteq \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}$ definiramo skup $A - k = \{a - k : a \in A\} \cap \mathbb{N}$. Zatim, za $A \subseteq \mathbb{N}$ i $U \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ definiramo skup $A_U = \{k \in \mathbb{N} : A - k \in U\}$. U sljedećem zadatku ističemo neka jednostavna svojstva upravo uvedenih skupova.

Zadatak 4. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{N}$ i $U \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$. Dokažite sljedeće tvrdnje:

a) $\mathbb{N}_U = \mathbb{N}$

b) $(A \cap B)_U = A_U \cap B_U$

c) $(\mathbb{N} \setminus A)_U = \mathbb{N} \setminus A_U$

d) $(A - k)_U = A_U - k$

e) Ako je $A \subseteq B$ onda $A_U \subseteq B_U$.

Za sve ultrafiltre $U, V \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ definiramo skup $U \oplus V = \{A \subseteq \mathbb{N} : A_U \in V\}$.

Zadatak 5. Dokažite sljedeće tvrdnje.

a) Za sve $U, V \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ vrijedi da je $U \oplus V \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$, tj. $\oplus$ je operator na $\mathcal{U}(\mathbb{N})$.

b) Za sve $U, V \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ vrijedi da je $(A_U)_V = A_{U \oplus V}$.

c) Operator $\oplus$ je asocijativan.

d) Za fiksirani $U \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ funkcija $f_U : \mathcal{U}(\mathbb{N}) \to \mathcal{U}(\mathbb{N})$ definirana s $f_U(V) = U \oplus V$ je neprekidna.

Za ultrafilter $U \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ kažemo da je **idempotentan** ako vrijedi $U \oplus U = U$. Ističemo i treći teorem čiji dokaz ispuštamo.

Teorem 3. *Postoji idempotentan ultrafilter $U \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$.*

Dajemo vrlo grubu skicu dokaza prethodnog teorema. Glavna nam je namjera naglasiti kako se koriste tvrdnje koje smo prije istaknuli. Za $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}(\mathbb{N})$ sa $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ označavamo skup $\{U \oplus V : U \in \mathcal{A},\ V \in \mathcal{B}\}$. Primjenom Zornove leme lako je dobiti da u skupu $\{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}(\mathbb{N}) :$ skup $\mathcal{A}$ je neprazan i zatvoren te $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}\}$ postoji maksimalni element $\mathcal{B}$ u odnosu na relaciju $\supseteq$ (uočite da je to minimalni element u odnosu na relaciju $\subseteq$). Skup $\mathcal{B}$ je zatvoren, a budući da je $\mathcal{U}(\mathbb{N})$ kompaktan Hausdorffov topološki prostor, skup $\mathcal{B}$ je i kompaktan.

Neka je $U \in \mathcal{B}$ proizvoljan ultrafilter. Budući da je skup $\mathcal{B}$ kompaktan te je funkcija f_U neprekidna, tada je skup $f_U[\mathcal{B}]$ također kompaktan. No, prostor $\mathcal{U}(\mathbb{N})$ je Hausdorffov (teorem 2.) pa je kompaktan skup $f_U[\mathcal{B}]$ zatvoren. Iz toga lako slijedi $\mathcal{B} = f_U[\mathcal{B}]$ te $\mathcal{B} = \{V \in \mathcal{B} : U \oplus V = U\}$. Budući da je $U \in \mathcal{B}$ tada $U \oplus U = U$.

U sljedećim propozicijama iskazujemo važna svojstva idempotentnih ultrafiltera koja ćemo koristiti u dokazu Hindmanovog teorema.

Propozicija 3. *Idempotentan ultrafilter $U \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ sadrži samo beskonačne skupove.*

Dokaz. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ označimo sa U_k glavni ultrafilter nad skupom $\mathbb{N}$ koji je generiran prirodnim brojem k. Dokažimo da za sve $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi $U_n \oplus U_m = U_{n+m}$. Primijetimo prvo da iz definicije glavnog ultrafiltera U_n slijedi da za svaki $k \in \mathbb{N}$ imamo sljedeće ekvivalencije:

$$A - k \in U_n \iff n \in A - k \iff n + k \in A \qquad (*)$$

Tada za svaki $A \subseteq \mathbb{N}$ redom vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$\begin{aligned} A \in U_n \oplus U_m \quad &\Leftrightarrow \quad A_{U_n} \in U_m \quad \Leftrightarrow \quad \{k : A - k \in U_n\} \in U_m \\ &\Leftrightarrow^{(*)} \quad \{k : n + k \in A\} \in U_m \quad \Leftrightarrow \quad m \in \{k : n + k \in A\} \\ &\Leftrightarrow \quad n + m \in A \quad \Leftrightarrow \quad A \in U_{n+m} \end{aligned}$$

Time je pomoćna tvrdnja dokazana. Tada slijedi da za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ imamo $U_n \oplus U_n = U_{2n} \neq U_n$. To znači da niti jedan glavni ultrafilter nad skupom $\mathbb{N}$ nije idempotentan. Iz propozicije 2. slijedi onda da idempotentni ultrafilteri sadrže samo beskonačne skupove. Q.E.D.

Propozicija 4. *Neka je $U \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ idempotentan ultrafilter te $A \in U$. Tada postoji prirodan broj $k \in A$ takav da je $A - k \in U$.*

Dokaz. Očito vrijede sljedeće ekvivalencije:

$$A \in U = U \oplus U \quad \Leftrightarrow \quad A_U \in U \quad \Leftrightarrow \quad \{n \in \mathbb{N} : A - n \in U\} \in U$$

Ultrafiltri su zatvoreni na konačne presjeke pa vrijedi $\{n : A - n \in U\} \cap A \in U$. Kao element ultrafiltra taj presjek je neprazan pa postoji $k \in A$ takav da je $A - k \in U$. Q.E.D.

4 Dokaz Hindmanovog teorema

Na samom početku ovog članka opisali smo tvrdnju Hindmanovog teorema pomoću bojanja. Sada ćemo iskazati teorem u formi koja nam je pogodnija za dokazivanje.

Hindmanov teorem. *Neka je* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *i* $f : \mathbb{N} \to \{1, ..., n\}$ *proizvoljna funkcija. Tada postoji beskonačan skup* $B \subseteq \mathbb{N}$ *takav da je funkcija* f *konstantna na skupu svih parcijalnih suma skupa* B, *tj. na skupu* $S_B = \left\{ \sum_{x \in C} x : C \subseteq B,\ C \text{ konačan} \right\}$.

Namjera nam je dati skicu dokaza odnosno naglasiti najvažnije korake dokaza Hindmanovog teorema. No, naglasit ćemo i detalje koje ovdje ispuštamo te ćemo ih formulirati na kraju kao zadatke.

Osnovna ideja dokaza sadržana je u tvrdnji propozicije 1. s početka ovog članka koja govori da nam ultrafiltri mogu pomoći prilikom izbora podskupa zadanog skupa. Označimo za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ sa A_i prasliku skupa $\{i\}$ u odnosu na funkciju f, tj. $A_i = \{k \in \mathbb{N} : f(k) = i\}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je funkcija f surjekcija, tj. da je za svaki $i \in \{1, \dots, n\}$ skup A_i neprazan (zašto?). Tada familija skupova $\{A_1, \dots, A_n\}$ očito definira jednu particiju skupa $\mathbb{N}$, tj. vrijedi $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \mathbb{N}$ te su članovi familije neprazni i u parovima disjunktni. Iz propozicije 1. slijedi da za svaki ultrafilter U nad skupom $\mathbb{N}$ postoji jedinstveni $i \in \{1, \dots, n\}$ tako da vrijedi $A_i \in U$. U daljnjim razmatranjima umjesto A_i pisat ćemo A.

Sada je glavno pitanje koji ultrafilter U trebamo odabrati kako bismo dobili traženi beskonačni podskup B. Upravo idempotentni ultrafiltri daju traženo. Ovo se možda čini pomalo iznenađujuće jer na prvu nije očito kakve bi uopće veze operator $\oplus$ mogao imati s Hindmanovim teoremom. Pokušajmo to malo intuitivno objasniti. Pretpostavimo za tren da smo odredili traženi beskonačni skup B pri čemu je $B = \{k_1, k_2, k_3 ...\}$. Tada za svaki broj $k \in S_B$ postoji beskonačno mnogo njegovih "proširenja" koja sadrže sve sumande kao i broj k te možda još neke dodatne. Naravno, ako od nekog "proširenja" oduzmemo broj k i dalje nam ostaje suma nekih elemenata skupa B što je također element od S_B. To pak znači da je za bilo koji $k \in S_B$ skup "proširenja" od kojih smo oduzeli k, tj. skup $S_B - k \cap S_B$, beskonačan. Taj skup $S_B - k \cap S_B$ je naravno i sam skup parcijalnih suma (nekog podskupa od B.) Primjerice, za $k = k_1$ to će biti skup svih parcijalnih suma skupa $B_1 = \{k_2, k_3, ...\}$. Opisani postupak bismo mogli ponoviti nad skupom S_{B_1} i tako konstruirati neki beskonačan skup C čiji je skup S_C svih parcijalnih suma podskup skupa S_B. Ako je skup S_B monokromatski tada će očito i skup S_C biti takav. Uočimo da za ovakvu konstrukciju skupa C početni skup S_B ne mora uopće biti skup svih parcijalnih suma nekog podskupa skupa $\mathbb{N}$. Zapravo, dovoljno je da je početni skup S monokromatski, da zadovoljava svojstvo da je skup $S - k \cap S$ beskonačan te da se postupak može rekurzivno ponavljati. Time se već daje naslutiti da bismo mogli iskoristiti idempotentne ultrafiltere. Naime, već smo vidjeli da svaki ultrafilter sadrži neki monokromatski skup A. Iz propozicije 4. znamo da idempotentan ultrafilter sadrži skup $A - k$ za neki $k \in A$, a onda sadrži i presjek $A - k \cap A$. Primijetimo još da su svi elementi idempotentnog ultrafiltera beskonačni pa je takav i skup $A - k \cap A$. Stoga se konstrukcija može rekurzivno ponavljati. Sada ćemo ovaj intuitivni opis konstrukcije skupa B probati malo formalnije definirati.

Neka je U proizvoljni idempotentni ultrafilter nad skupom $\mathbb{N}$ (iz teorema 3. slijedi da takav postoji). Tada za svaki skup $C \in U$ vrijedi $C \in U \oplus U$ a onda i $C_U \in U$. Iz zatvorenosti ultrafiltra na konačne presjeke slijedi $C \cap C_U \in U$. Iz propozicije 3. slijedi da je skup $C \cap C_U$ beskonačan za svaki $C \in U$.

Primijetimo još da za svaki $C \in U$ i svaki $k \in C_U \cap C \in U$ posebno slijedi $k \in C_U$ a onda iz definicije skupa C_U imamo $C - k \in U$ odnosno i $(C - k) \cap C \in U$.

Prethodna razmatranja služe nam kako bismo mogli rekurzivno definirati niz skupova $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ i niz prirodnih brojeva $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} A^1 &:= A, && k_1 \in A^1 \cap A^1_U \ \text{ proizvoljan} \\ A^{n+1} &:= (A^n - k_n) \cap A^n, && k_{n+1} \in A^{n+1} \cap A^{n+1}_U \ \text{ poizvoljan takav da } \ k_{n+1} > k_n \end{aligned}$$

Indukcijom je lako dokazati da za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vrijedi $A^n \in U$.

Neka je $B = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$. Iz definicije niza $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vidimo da se radi o strogo rastućem nizu pa je skup B beskonačan. Niz $(A^n)_{n \in \mathbb{N}}$ je padajući obzirom na inkluziju. Naime, imamo da je $A^{n+1} = (A^n - k_n) \cap A^n \subseteq A^n$. Lako je indukcijom dobiti da vrijedi $A^n \subseteq A^1 = A$, a onda i $k_n \in A^n \cap A^n_U \subseteq A$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz toga slijedi $B \subseteq A$.

Indukcijom (opet) lako je dokazati da za svaki konačan podskup $I \subseteq \mathbb{N}$ vrijedi $\sum_{i \in I} k_i \in A^{min(I)}$. Iz toga odmah slijedi $S_B \subseteq A$. Iz definicije skupa A tada konačno imamo da je funkcija f konstanta na skupu S_B. Kako je skup B beskonačan, dokazali smo Hindmanov teorem.

Zadatak 6. Dokažite sljedeće detalje iz prethodne skice dokaza Hindmanovog teorema.

a) Za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vrijedi $A^n \in U$.

b) Definicija niza $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je dobra, tj. za svaki $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ postoji prirodan broj $k_{n+1} \in A^{n+1} \cap A^{n+1}_U$ takav da $k_{n+1} > k_n$.

c) Za svaki konačan podskup $I \subseteq \mathbb{N}$ vrijedi $\sum_{i \in I} k_i \in A^{min(I)}$.

5 Poopćenja Hindmanovog teorema

Iako je Hindmanov teorem pomalo neočekivan, postavlja se pitanje može li se dodatno generalizirati i vrijede li neki analogni rezultati. Odgovor je potvrdan i ovdje ćemo navesti nekoliko takvih primjera. Dokaze teorema koji slijede može se naći u članku [8].

Analogon Hindmanovog teorema vrijedi i za množenje, tj. za svako konačno bojanje skupa $\mathbb{N}$ postoji beskonačan podskup od $\mathbb{N}$ čiji je skup parcijalnih produkata monokromatski. Iskažimo to i formalno u sljedećem teoremu.

Hindmanov teorem za množenje. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f : \mathbb{N} \to \{1, ..., n\}$ proizvoljna funkcija. Tada postoji beskonačan skup $B \subseteq \mathbb{N}$ takav da je funkcija f konstantna na skupu svih parcijalnih produkata skupa B, tj. na skupu $\{\prod_{x \in C} x : C \subseteq B, C$ konačan$\}$.*

Također vrijedi i analogon Hindmanovog teorema na partitivnom skupu skupa $\mathbb{N}$. To iskazujemo u sljedećem teoremu.

Hindmanov teorem za $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. *Neka je $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{1, ..., n\}$ proizvoljna funkcija. Tada postoji beskonačan skup $B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ takav da je funkcija f konstantna na skupu $\{\bigcup_{D \in C} D : C \subseteq B, C$ konačan$\}$.*

Navedimo na kraju još jedno popćenje koje tvrdi da je umjesto skupa $\mathbb{N}$ moguće promatrati skup svih parcijalnih suma nekog beskonačnog podskupa od $\mathbb{N}$.

Hindmanov teorem za skup parcijalnih suma. *Neka je $A \subseteq \mathbb{N}$ beskonačan skup i S_A pripadni skup svih parcijalnih suma. Tada za proizvoljan $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i proizvoljnu funkciju $f : S_A \to \{1, ..., n\}$ postoji beskonačan skup $B \subseteq S_A$ takav da je funkcija f konstantna na S_B.*

Literatura

[1] J. Avigad. The Mechanization of Mathematics. *Notices of the AMS*, 65:681–690, 2018.

[2] B. G. Drmić. *Hindmanov teorem*. diplomski rad, PMF, Matematički odsjek, 2022.

[3] N. Hindman. Finite sums from sequences within cells of a partition of $\mathbb{N}$. *Journal of Combinatorical Theory*, 17:1–11, 1974.

[4] M. Hils; F. Loeser. *A First Journey through Logic*. AMS, Providence, 2019.

[5] M. Vuković. *Matematička logika*. Element, Zagreb, 2009.

[6] M. Vuković. *Primijenjena logika, nastavni materijal za doktorski kolegij Matematička logika i računarstvo*. PMF, Matematički odsjek, Zagreb, 2011. https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/APPLOG-skripta-2011.pdf.

[7] M. Vuković. *Teorija skupova, predavanja*. PMF, Matematički odsjek, Zagreb, 2015. https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/TS-predavanja-2015.pdf.

[8] G. Zhou. Ultrafilter and Hindman's theorem, preprint. 2017.