Sveučilište u Zagrebu
PMF-Matematički odsjek

Mladen Vuković

MODALNA LOGIKA

predavanja izbornog kolegija na diplomskim studijima

Zagreb, lipanj, 2026.

Predgovor

Ovaj nastavni materijal iz matematičke logike nastao je na osnovu zabilješki iz izbornog kolegija *Modalna logika* na diplomskim studijima *Računarstvo i matematika* te *Teorijska matematka*. Nadam se da će tekst zanimati sve one koji žele dublje proniknuti u osnove matematike, ili pak žele svoje prije stečeno znanje osvježiti. Svaki ispravak, ili pak sugestije, koje bi mogle doprinijeti poboljšanju ovog teksta, rado ću prihvatiti.

U Zagrebu, lipanj 2026. Mladen Vuković

Sadržaj

Predgovor **ii**

1 Osnovni pojmovi i metode modalne logike **3**
- 1.1 Sintaksa osnovne modalne logike . . . 3
- 1.2 Semantika osnovne modalne logike . . . 4
- 1.3 Osnovne konstrukcije modela . . . 13
- 1.4 Bisimulacije . . . 16
- 1.5 Bisimulacijske igre . . . 19
- 1.6 Metoda filtracije . . . 24

2 Potpunost modalnih logika **27**
- 2.1 Najmanja normalna modalna logika K . . . 27
- 2.2 Normalne modalne logike . . . 32

3 Teorija korespondencije **37**
- 3.1 Standardna translacija . . . 37
- 3.2 Van Benthemov teorem karakterizacije . . . 39

4 Ultrafiltri, ultraprodukti i ultrafilterska proširenja **43**
- 4.1 Modalna saturacija . . . 46
- 4.2 Ultrafilterska proširenja . . . 47
- 4.3 Prebrojivo saturirani modeli . . . 49

5 Modalna definabilnost **57**
- 5.1 Elementarne klase struktura . . . 58
- 5.2 Modalna definabilnost klasa točkovnih modela . . . 59
- 5.3 Standardna translacija drugog reda . . . 62
- 5.4 Nedefinabilnost . . . 62
- 5.5 Goldblatt-Thomasonov teorem . . . 63

Bibliografija **67**

Kazalo **68**

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i metode modalne logike

U ovom poglavlju prvo ćemo definirati jezik osnovne modalne logike s jednim unarnim modalnim operatorom. Nakon toga definiramo semantiku, odnosno definiramo pojam Kripkeovog okvira i modela te istinitost modalne formule na nekom svijetu Kripkeovog modela. U trećoj točki razmatramo osnovne konstrukcije modela kao što su disjunktne unije, generirani podmodeli i ograničeni morfizmi. Posebna točka je posvećena najvažnijim relacijama među modelima, tj. bisimulacijama. Definiramo pojam standardne translacije koja preslikava modalne formule u formule logike prvog reda.

Metoda filtracije nam je posebno važna jer se pomoću nje dokazuje važna činjenica (svojstvo konačnih modela) koju koristimo prilikom dokaza odlučivosti neke modalne logike.

1.1 Sintaksa osnovne modalne logike

U ovoj točki prvo definiramo alfabet osnovne modalne logike (eng. basic modal logic). Osnovnu modalnu logiku prije svega karakterizira samo jedan modalni operator $\Diamond$. Ovdje želimo naglasiti da ćemo se najvećim dijelom baviti samo osnovnom modalnom logikom.

Definicija 1.1. ***Alfabet osnovnog modalnog jezika*** *je unija sljedećih skupova:*

- *skup prebrojivo mnogo propozicionalnih varijabli* $Prop = \{p, q, r, \dots\}$
- *skup logičkih veznika, modalnog operatora i logičke konstante* $\{\neg, \vee, \Diamond, \bot\}$
- *skup pomoćnih simbola* $\{(,)\}$ *(zagrade).*

U nastavku koristimo i logičke veznike $\wedge$, $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$. Oni nisu navedeni u definiciji alfabeta budući da se mogu iskazati pomoću navedenih logičkih veznika. Primjerice, znamo iz logike sudova da je formula $A \wedge B$ logički ekvivalentna formuli $\neg(\neg A \vee \neg B)$.

Modalni operator $\Diamond$ čitamo *diamond*. Zatim, koristimo unarni modalni operator $\Box$ kao pokratu za $\neg\Diamond\neg$ te ga čitamo *box*.

Koristiti ćemo i logičku konstantu $\top$ kao pokratu za $\neg\bot$.

U nastavku definiramo pojam formule osnovnog modalnog jezika. Definicija je analogna definiciji formule logike sudova uz dodatak operatora $\Diamond$.

Definicija 1.2. ***Atomarna formula osnovnog modalnog jezika*** *je svaka propozicionalna varijabla i logička konstanta* $\bot$.

Pojam ***formule*** *osnovnog modalnog jezika definiramo rekurzivno:*

1. *svaka atomarna formula je formula*

2. *ako su* φ *i* ψ *formule, tada su i riječi* $\neg\varphi$, $\varphi \vee \psi$ *i* $\Diamond\varphi$ *također formule.*

Riječ alfabeta osnovne modalne logike je formula ako je nastala primjenom konačno mnogo koraka 1. i 2. Formule obično označavamo simbolima φ, ψ, χ.

Složenost modalne formule definira se kao broj svih veznika i modalnih operatora u formuli.

Za razliku od logike sudova, u modalnoj logici definiramo i stupanj modalne formule. Intuitivno, stupanj formule je maksimalni broj ugniježđenih modalnih operatora.

Definicija 1.3. ***Stupanj*** *modalne formule* φ*, u oznaci* $deg(\varphi)$*, definiramo rekurzivno na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} deg(\bot) &= 0 \\ deg(p) &= 0 \\ deg(\neg\varphi) &= deg(\varphi) \\ deg(\varphi \vee \psi) &= max\{deg(\varphi), deg(\psi)\} \\ deg(\Diamond\varphi) &= 1 + deg(\varphi) \end{aligned}$$

Stupanj konačnog skupa formula Σ *definiramo kao maksimalni stupanj svih formula iz* Σ*, to jest* $deg(\Sigma) = max\{deg(\varphi),\ \varphi \in \Sigma\}$.

1.2 Semantika osnovne modalne logike

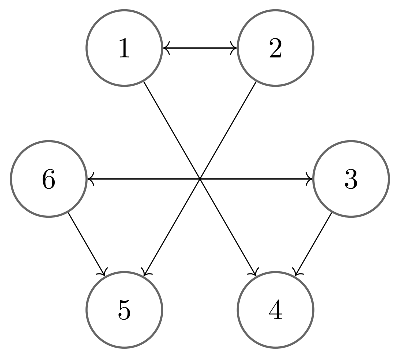
Prvo ćemo definirati pojmove relacijskih struktura koje se nazivaju Kripkeov okvir i Kripkeov model. Zatim ćemo definirati pojam istinitosti i valjanosti formule na Kripkeovom okviru, odnosno Kripkeovom modelu čime ćemo povezati modalni jezik s navedenim relacijskim strukturama. Na kraju ove točke definiramo pojmove lokalne i globalne semantičke posljedice.

Definicija 1.4. ***Kripkeov okvir*** *za osnovni modalni jezik je uređeni par* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *gdje je* W *neprazni skup koji nazivamo* ***nosač*** *(domena), a* R *binarna relacija na skupu* W *koju nazivamo* ***relacija dostiživosti****. Elemente nosača* W *nazivamo* ***svjetovi****.*

Za svjetove $w, v \in W$ *kažemo da je svijet* v ***dostiživ*** *iz svijeta* w *ako je* $(w, v) \in R$. *Umjesto* $(w, v) \in R$ *pisat ćemo* wRv *te kažemo da je svijet* v **sljedbenik svijeta** w.

Primjer 1.5. *Navodimo primjere nekih Kripkeovih okvira te ih ilustriramo.*

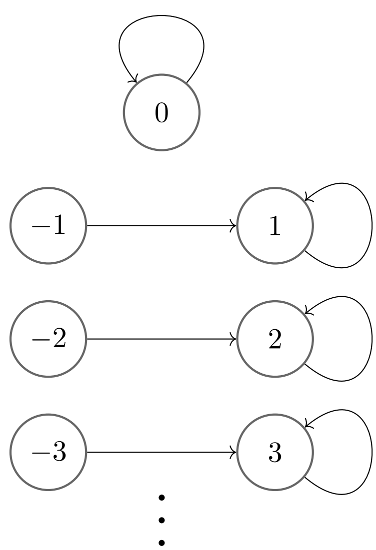
a) *Neka je* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *Kripkeov okvir gdje je nosač* $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$*, a relacija dostiživosti* $R = \{(1, 4), (1, 2), (2, 1), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (6, 3), (6, 5)\}$*. Na sljedećoj slici ilustriramo upravo definirani okvir.*



b) *Neka je* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *gdje je nosač* $W = \mathbb{Z}$ *i relacija* R *je definirana ovako:*

$$xRy \quad \textit{ako i samo ako} \quad |x| = y.$$

Slijedi ilustracija navedenog okvira.



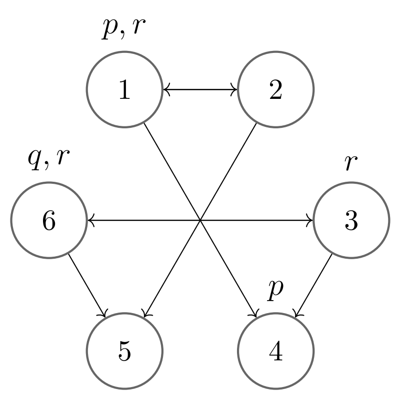
U nastavku definiramo strukturu koja se naziva Kripkeov model. Nakon toga ćemo moći definirati istinitost formule na nekom svijetu i na Kripkeovom modelu. Već sada možemo pretpostaviti da će formule poput $\top$ i $p \to p$ biti istinite na svim svjetovima i okvirima kao što su uvijek istinite u logici sudova bez obzira na interpretaciju. Kao što u logici sudova istinitost formule ovisi o funkciji interpretacije, ovdje će nam od važnosti biti funkcija zvana valuacija. No, za razliku od logike sudova, u modalnog logici ne možemo definirati istinitost formule isključivo putem funkcije već nam je bitan i Kripkeov okvir.

Definicija 1.6. ***Kripkeov model*** *za osnovni modalni jezik je uređeni par* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ *gdje je* $\mathfrak{F} = (W, R)$ *okvir za osnovni modalni jezik, a* $V\colon Prop \to \mathcal{P}(W)$ *funkcija koju nazivamo* ***valuacija****. Kažemo da je model* $\mathfrak{M}$ *baziran na okviru* $\mathfrak{F}$*.*

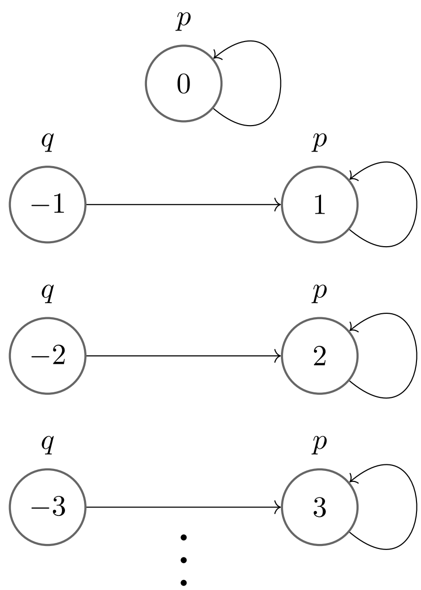
U nastavku umjesto Kripkeov okvir i Kripkeov model pišemo samo kratko okvir, odnosno model. Zatim, umjesto $\mathfrak{M} = ((W, R), V)$ pišemo $\mathfrak{M} = (W, R, V)$. Često ćemo umjesto $w \in W$ pisati $w \in \mathfrak{M}$.

Primjer 1.7. *Za okvire iz prethodnog primjera navodimo neke modele koji su bazirani na njima.*

a) Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *model baziran na prvom okviru iz prošlog primjera, a definicija valuacije* V *je sljedeća:* $V(p) = \{1, 4\}$. $V(q) = \{6\}$, $V(r) = \{1, 6, 3\}$, *te* $V(s) = \emptyset$ *za preostale propozicionalne varijable* s*. Model* $\mathfrak{M}$ *ilustriramo na sljedećoj slici.*



b) Neka je $\mathfrak{F} = (\mathbb{Z}, R)$ *okvir kao u prošlom primjeru, a* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ *model, gdje je valuacija* V *definirana ovako:* $V(p) = \mathbb{N}$, $V(q) = \mathbb{Z}^-$ *i* $V(r) = \emptyset$, *za preostale propozicionalne varijable* $r \in Prop$*. Na sljedećoj slici ilustriramo upravo definirani model.*



Vidimo da valuacija preslikava propozicionalnu varijablu u skup svih svjetova na kojima je ta varijabla istinita. Iz toga se na prirodan način definicija istinitosti na svijetu proširuje na proizvoljne formule. Slijedi formalna definicija istinitosti formule na svijetu.

Definicija 1.8. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model i neka je $w \in W$ svijet.* ***Istinitost formule*** φ ***na svijetu*** w ***iz modela*** $\mathfrak{M}$*, u oznaci* $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$*, definiramo rekurzivno na sljedeći način:*

a) $\mathfrak{M}, w \Vdash p$ *ako i samo ako* $w \in V(p)$*, za svaku propozicionalnu varijablu* p

b) $\mathfrak{M}, w \nVdash \bot$

c) $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\varphi$ *ako i samo ako nije* $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$

d) $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \vee \psi$ *ako i samo ako* $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ *ili* $\mathfrak{M}, w \Vdash \psi$

e) $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$ *ako i samo ako postoji svijet* $v \in W$ *takav da vrijedi* wRv *i* $\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$*.*

Kažemo da je formula φ ***istinita na modelu*** $\mathfrak{M}$ *ako je istinita na svakom svijetu modela* $\mathfrak{M}$*. Oznaka:* $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$*.*

Kažemo da je formula φ ***ispunjiva na modelu*** $\mathfrak{M}$ *ako je istinita na nekom svijetu modela* $\mathfrak{M}$*.*

Kažemo da je formula φ ***ispunjiva*** *ako postoji model na kojem je ispunjiva.*

Kažemo da je formula φ ***oboriva na modelu*** $\mathfrak{M}$ *ako je njena negacija* $\neg\varphi$ *ispunjiva na modelu* $\mathfrak{M}$*. Oznaka:* $\mathfrak{M} \nVdash \varphi$*.*

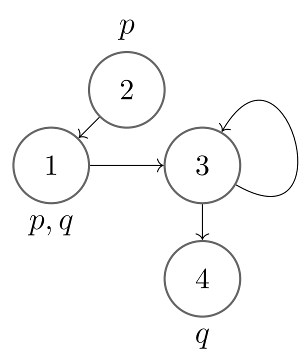
Kažemo da je formula φ ***oboriva*** *ako postoji model na kojem je oboriva.*

Ako je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ neki model i φ formula tada sa $V(\varphi)$ označavamo skup $\{w \in W : \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi\}$.

Napomena 1.9. *Ako vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ tada kažemo da svijet w forsira formulu φ. Iz ekvivalencije operatora $\Box$ i izraza $\neg\Diamond\neg$, lako se pokaže da vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Box\varphi \text{ ako i samo ako za svaki svijet } v \in W \text{ takav da } wRv \text{ vrijedi } \mathfrak{M}, v \Vdash \varphi.$$

Primjer 1.10. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model gdje je $W = \{1, 2, 3, 4\}$, relacija dostiživosti je $R = \big\{(1, 3), (2, 1), (3, 3), (3, 4)\big\}$, a valuacija V zadana je sa $V(p) = \{1, 2\}$, $V(q) = \{1, 4\}$ i $V(r) = \emptyset$ za preostale propozicionalne varijable $r \in Prop$. Tada redom vrijedi: $\mathfrak{M}, 1 \Vdash \neg\Diamond p \vee \Diamond\neg q$, $\mathfrak{M}, 2 \nVdash \neg\Diamond p \vee \Diamond\neg q$ i $\mathfrak{M}, 3 \Vdash \neg\Diamond p \wedge \Diamond\neg q$. Na sljedećoj slici ilustriran je model $\mathfrak{M}$.*



Definicija 1.11. *Kažemo da je formula φ **valjana na svijetu** w **okvira** $\mathfrak{F}$ ako za svaku valuaciju V vrijedi $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \varphi$. Oznaka: $\mathfrak{F}, w \Vdash \varphi$.*

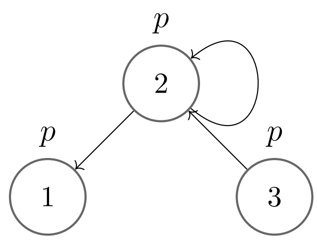
*Kažemo da je formula φ **valjana na okviru** $\mathfrak{F}$ ako je valjana na svakom svijetu okvira $\mathfrak{F}$. Oznaka: $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$*

*Kažemo da je formula φ **valjana** ako je valjana na svakom okviru.*

*Kažemo da je formula φ **valjana na klasi okvira** F ako je valjana na svakom okviru iz F. Oznaka: $F \Vdash \varphi$.*

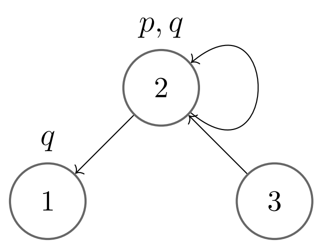
Prvo ćemo dati primjer okvira te pokazati koje formule jesu i nisu valjane na okviru. Zatim dajemo primjer modela baziranog na definiranom okviru te pokazujemo primjere formula koje jesu, te koje nisu istinite na modelu, odnosno na svjetovima.

Primjer 1.12. *Neka je $\mathfrak{F} = (W, R)$ okvir gdje je $W = \{1, 2, 3\}$ i relacija dostiživosti je zadana sa $R = \big\{(2, 1), (3, 2), (2, 2)\big\}$. Tada, primjerice, formula $\varphi \equiv \Box p \rightarrow \Diamond p$ nije valjana na okviru $\mathfrak{F}$. Kako bismo to pokazali definiramo valuaciju V sa $V(p) = \{1, 2, 3\}$. Označimo model $(\mathfrak{F}, V)$ sa $\mathfrak{M}$. Tada vrijedi $\mathfrak{M}, 1 \Vdash \Box p$ i $\mathfrak{M}, 1 \nVdash \Diamond p$, odnosno $\mathfrak{M}, 1 \nVdash \Box p \rightarrow \Diamond p$. Na sljedećoj slici ilustriran je model $\mathfrak{M}$.*



Lako je vidjeti da vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \Diamond p \to \Diamond\Diamond p$ *jer je ta formula valjana na svakom svijetu bez obzira na valuaciju. Međutim, formula* $\Box p \to \Box\Box p$ *nije valjana na okviru* $\mathfrak{F}$ *jer za valuaciju* V *takvu da* $V(p) = \{2\}$ *vrijedi* $(\mathfrak{F}, V), 3 \nVdash \Box p \to \Box\Box p$.

Proširimo definiciju valuacije V *sa* $V(q) = \{1, 2\}$ *te ilustrirajmo model* $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$.



Tada redom vrijedi: $\mathfrak{M} \Vdash \Box q \to \Box\Box q$, $\mathfrak{M} \nVdash \Diamond q$, $\mathfrak{M}, 1 \Vdash \neg\Diamond p \wedge \Box p$, $\mathfrak{M}, 2 \Vdash p \wedge q \wedge \Diamond p \wedge \neg(\Box p)$ *i* $\mathfrak{M}, 3 \Vdash \Box\Diamond\Box q$.

Definicije ispunjivosti i valjanosti možemo proširiti i na skupove formula.

Definicija 1.13. Skup formula Γ istinit je na nekom svijetu w modela $\mathfrak{M}$ *ako je svaka formula iz* Γ *istinita na svijetu* w. *Oznaka:* $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$.

Skup formula Γ ispunjiv je na modelu $\mathfrak{M}$ *ako je istinit na nekom svijetu modela* $\mathfrak{M}$.

Skup formula Γ valjan je na nekom okviru $\mathfrak{F}$ *ako je svaka formula iz* Γ *valjana na okviru* $\mathfrak{F}$. *Oznaka:* $\mathfrak{F} \Vdash \Gamma$.

Skup formula Γ je valjan na klasi okvira F *ako je svaka formula iz* Γ *valjana na klasi okvira* F. *Oznaka:* $F \Vdash \Gamma$.

Definicija 1.14. *Neka je* S *klasa modela ili okvira te neka je* Γ *skup formula. Za formulu* φ *kažemo da je* **lokalna semantička posljedica** *od* Γ *ako za svaki model* $\mathfrak{M} \in S$, *odnosno model* $\mathfrak{M}$ *baziran na nekom okviru iz klase* S, *vrijedi da za svaki svijet* w *iz nosača okvira ili modela, vrijedi da* $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$ *povlači* $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. *Oznaka:* $\Gamma \Vdash_S \varphi$.

Kažemo da je formula φ **globalna semantička posljedica** *skupa formula* Γ *ako za svaku strukturu* $\mathfrak{N} \in S$ *za koju vrijedi* $\mathfrak{N} \Vdash \Gamma$, *imamo* $\mathfrak{N} \Vdash \varphi$. *Oznaka:* $\Gamma \Vdash_S^g \varphi$.

Kažemo da su formule φ *i* ψ **logički ekvivalentne** *ako za svaki model* $\mathfrak{M}$ *i svaki svijet* $w \in \mathfrak{M}$ *vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi.$$

Zadaci

1. Dokažite da su sljedeće formule valjane:

   a) $(\Box p \wedge \Box q) \to \Box(p \wedge q)$
   b) $\Box(p \leftrightarrow q) \to (\Box p \leftrightarrow \Box q)$
   c) $\Box\bot \to \Box p$
   d) $\neg\Box\bot \to (\Box p \to \Diamond p)$
   e) $\Diamond(p \vee q) \leftrightarrow (\Diamond p \vee \Diamond q)$
   f) $(\Box p \vee \Box q) \to \Box(p \vee q)$
   g) $\Diamond(p \wedge q) \to (\Diamond p \wedge \Diamond q)$

2. Dokažite da sljedeće formule nisu valjane:

   a) $\Box(p \vee q) \to (\Box p \vee \Box q)$
   b) $(\Box p \to \Box q) \to \Box(p \to q)$
   c) $(\Box p \leftrightarrow \Box q) \to \Box(p \leftrightarrow q)$
   d) $p \to \Box p$
   e) $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$
   f) $p \to \Diamond p$
   g) $p \to \Box\Diamond p$

3. Dokažite da je svaka tautologija logike sudova valjana na svakom Kripkeovom okviru.

4. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model te neka su $m_\Diamond, m_\Box : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ funkcije koja su definirane ovako:

   $$m_\Diamond(X) = \{w \in W : \text{ postoji svijet } u \in X \text{ takav da } wRu\}$$

   $$m_\Box(X) = \{w \in W : \text{ za svaki svijet } u \in W \text{ takav da } wRu \text{ vrijedi } u \in X\}.$$

   Dokažite da za sve skupove $Y, Z \subseteq W$ vrijedi:

   $$m_\Box(Y \cap Z) = m_\Box(Y) \cap m_\Box(Z) \quad \text{i} \quad m_\Box(Y) = W \setminus m_\Diamond(W \setminus Y).$$

   Zatim, dokažite da za svaku formulu φ vrijedi:

   $$m_\Diamond(V(\varphi)) = V(\Diamond\varphi) \quad \text{i} \quad m_\Box(V(\varphi)) = V(\Box\varphi).$$

5. Kažemo da je okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ refleksivan ako vrijedi wRw za svaki svijet $w \in W$. Dokažite da postoji okvir $\mathfrak{F}$ koji nije refleksivan te valuacija V na okviru $\mathfrak{F}$ i svijet $w \in \mathfrak{F}$ tako da vrijedi $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Box p \to p$.

6. Za Kripkeov okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ kažemo da je simetričan ako je relacija R simetrična, tj. za sve $x, y \in W$ takve da je xRy vrijedi yRx. Dokažite da postoji okvir $\mathfrak{F}$ koji nije simetričan te valuacija V na okviru $\mathfrak{F}$ i svijet $w \in \mathfrak{F}$ tako da vrijedi $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash p \to \Box\Diamond p$.

7. Za Kripkeov okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ kažemo da je tranzitivan ako za sve svjetove $x, y, z \in W$ takve da je $xRyRz$ vrijedi xRz. Dokažite da postoji okvir $\mathfrak{F}$ koji nije tranzitivan te valuacija V na okviru $\mathfrak{F}$ i svijet $w \in \mathfrak{F}$ tako da vrijedi $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Box p \to \Box\Box p$.

8. Za Kripkeov okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ kažemo da je parcijalno funkcionalan ako za sve svjetove $x, y, z \in W$ vrijedi da xRy i xRz povlači $y = z$. Dokažite da za svaki Kripkeov okvir $\mathfrak{F}$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{F} \Vdash \Diamond p \to \Box p \text{ ako i samo ako okvir } \mathfrak{F} \text{ je parcijalno funkcionalan.}$$

9. Za Kripkeov okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ kažemo da je funkcijski ako za svaki svijet $x \in W$ postoji jedinstveni svijet $y \in W$ tako da vrijedi xRy. Dokažite da za svaki Kripkeov okvir $\mathfrak{F}$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{F} \Vdash \Diamond p \leftrightarrow \Box p \text{ ako i samo ako okvir } \mathfrak{F} \text{ je funkcijski.}$$

10. Kažemo da je Kripkeov okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ euklidski ako za sve svjetove $x, y, z \in W$ vrijedi da iz xRy i xRz slijedi yRz. Dokažite da za svaki okvir $\mathfrak{F}$ vrijedi:

$$\mathfrak{F} \Vdash \Diamond p \to \Box \Diamond p \text{ ako i samo ako okvir } \mathfrak{F} \text{ je euklidski.}$$

Zatim, dokažite da postoji okvir $\mathfrak{F}$ koji nije euklidski te valuacija V na okviru $\mathfrak{F}$ i svijet $w \in \mathfrak{F}$ tako da vrijedi $(\mathfrak{F}, V), w \Vdash \Diamond p \to \Box \Diamond p$.

11. Za relaciju $R \subseteq W \times W$ kažemo da zadovoljava uvjet da nema grananja u desno ako vrijedi:

$$\forall x \forall y \forall z (xRy \land xRz \to yRz \lor y = z \lor zRy\ )$$

Dokažite da za svaki okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{F} \Vdash \Diamond p \land \Diamond q \to \Diamond (p \land \Diamond q) \lor \Diamond (p \land q) \lor \Diamond (\Diamond p \land q)$$

ako i samo ako

relacija R zadovoljava uvjet da nema grananja u desno.

12. Za relaciju $R \subseteq W \times W$ kažemo da je **inverzno dobro fundirana** ako ne postoji niz (w_n) tako da vrijedi $w_0 R w_1 R w_2 \ldots$ Dokažite da za svaki okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$\mathfrak{F} \Vdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p$ ako i samo ako relacija R je tranzitivna i inverzno dobro fundirana.

13. Za relaciju $R \subseteq W \times W$ kažemo da je slabo gusta ako za sve svjetove $s, t \in W$ takve da je sRt vrijedi da postoji svijet $u \in W$ takav da sRu i uRt. Dokažite da za svaki okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{F} \Vdash \Box \Box p \to \Box p \text{ ako i samo ako relacija } R \text{ je slabo gusta.}$$

14. Za relaciju $R \subseteq W \times W$ kažemo da je slabo usmjerena ako za sve svjetove $s, t, u \in W$ takve da je sRt i sRu vrijedi da postoji svijet $v \in W$ tako da vrijedi tRv i uRv. Dokažite da za svaki okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{F} \Vdash \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \text{ ako i samo ako relacija } R \text{ je slabo usmjerena.}$$

15. Formula $\varphi \equiv \Box(\Box(p \to \Box p) \to p) \to p$ naziva se Grzegorczykova formula. Dokažite da za svaki okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

    $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$ ako i samo ako relacija dostiživosti R je refleksivna, tranzitivna i ne postoji beskonačni lanac $w_0Rw_1Rw_2R\ldots$ takav da je $w_i \neq w_{i+1}$ za svaki i.

16. Neka je Γ skup formula osnovnog modalnog jezika te a neka je sa $\mathcal{M}$ označena klasa svih modela. Dokažite sljedeću ekvivalenciju:

$$\Gamma \Vdash^g_{\mathcal{M}} \varphi \text{ ako i samo ako } \{\Box^n\varphi \ : \ \varphi \in \Gamma,\ n \in \mathbb{N}\} \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi.$$

17. Neka je $\mathcal{M}$ klasa svih modela. Dokažite da za lokalnu relaciju logičke posljedice vrijedi analogon teorema dedukcije, tj. da za sve formule φ i ψ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\varphi \Vdash_{\mathcal{M}} \psi \text{ ako i samo ako } \Vdash_{\mathcal{M}} \varphi \to \psi.$$

    Dokažite da za globalnu relaciju logičke posljedice ne vrijedi analogon teorem dedukcije. Zatim, dokažite da za klasu $Tran$ svih tranzitivnih modela vrijedi:

$$\varphi \Vdash^g_{Tran} \psi \text{ ako i samo ako } \Vdash^g_{Tran} \Box\varphi \to \psi.$$

1.3 Osnovne konstrukcije modela

Zanimaju nas operacije kojima se od danih modela dobivaju novi modeli tako da se očuva istinitost modalnih formula. Ako čuvanje istinitosti vrijedi u oba smjera, govorimo o invarijantnosti.

Definicija 1.15. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli i neka su $w \in W$ i $w' \in W'$ svjetovi. Kažemo da su svjetovi w i w'* **modalno ekvivalentni** *ako za svaku formulu φ vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi$$

Oznaka: $w \equiv w'$.

Disjunktna unija je uobičajena skupovna operacija koju ovdje provodimo na svim komponentama modela.

Definicija 1.16. *Neka je $(\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, V_i) : i \in I)$ indeksirana familija modela čiji su nosači međusobno disjunktni. Njihova* **disjunktna unija** *je model $\biguplus_i \mathfrak{M}_i = (W, R, V)$, gdje je $W = \bigcup_i W_i$, $R = \bigcup_i R_i$ i $V(p) = \bigcup_i V_i(p)$ za svaku propozicionalnu varijablu p.*

Disjunktna unija modela čiji nosači nisu disjunktni definira se tako da se promatraju disjunktne kopije. Primjerice, umjesto modela $\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, V_i)$ promatramo model s nosačem $\{(w, i) : w \in W_i\}$ i na standardni način definiranom relacijom dostiživosti i valuacijom. Istinitost modalnih formula je invarijantna na disjunktne unije. To iskazujemo u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 1.17. *Neka je $(\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i, V_i) : i \in I)$ indeksirana familija modela čiji su nosači međusobno disjunktni. Za svaku modalnu formulu φ, za svaki $i \in I$ i za svaki $w \in W_i$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$\mathfrak{M}_i, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \biguplus_i \mathfrak{M}_i, w \Vdash \varphi.$$

Dokaz ispuštamo, uz komentar da tvrdnja intuitivno očito vrijedi, jer istinitost modalne formule u svijetu w ovisi samo o svjetovima do kojih se može doći iz w pomoću relacije dostiživosti, što znači da ne može ovisiti o svjetovima iz drugih članova disjunktne unije. Osim toga, tvrdnja propozicije lako slijedi iz analogne tvrdnje o bisimulacijama koju ćemo dokazati kasnije.

Na podmodelu općenito neće biti očuvana istinitost modalnih formula jer ona ovisi o dostiživim svjetovima koji možda više nisu u nosaču podmodela. Invarijantnost će, dakle, ipak vrijediti ako postavimo dodatni uvjet zatvorenosti na dostiživost.

Definicija 1.18. *Kažemo da je model $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$* **podmodel** *modela $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ ako je $W' \subseteq W$, $R' = R \cap (W' \times W')$ i $V'(p) = V(p) \cap W'$ za svaku propozicionalnu varijablu p.*

Kažemo da je model $\mathfrak{M}'$ **generirani podmodel** *od $\mathfrak{M}$ ako je $\mathfrak{M}'$ podmodel od $\mathfrak{M}$ i za sve svjetove $w, v \in W$ vrijedi da wRv i $w \in W'$ povlači $v \in W'$.*

Za model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $X \subseteq W$ najmanji generirani podmodel od $\mathfrak{M}$ čiji nosač sadrži X zovemo **podmodel generiran skupom** *X.*

Za model $\mathfrak{M}$ generiran jednočlanim skupom $\{w\}$ kažemo da je **točkovno generiran***, te tada svijet w nazivamo* **korijen** *modela $\mathfrak{M}$.*

Propozicija 1.19. *Neka je $\mathfrak{M}'$ generirani podmodel od $\mathfrak{M}$. Tada za svaku formulu φ i za svaki svijet $w \in W'$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w \Vdash \varphi.$$

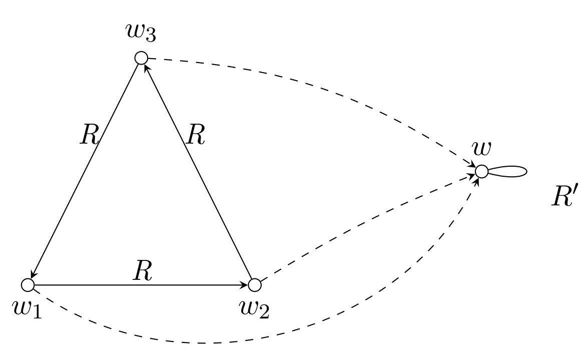
I u ovom slučaju tvrdnja će slijediti iz općenitije tvrdnje koju ćemo dokazati kasnije. Uočimo i da je analogna propozicija o disjunktnim unijama posljedica prethodne, jer je svaki član disjunktne unije generirani podmodel te unije.

Važna preslikavanja među relacijskim strukturama, kao što su homomorfizmi, jaki homomorfizmi i izomorfizmi, nisu prikladna za modalnu logiku. Naime, homomorfizmi nisu dovoljno jaki za invarijantnost, dok su izomorfizmi prejaki, odnosno postoji šira klasa preslikavanja za koju vrijedi invarijantnost.

Definicija 1.20. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli. Funkciju $f : W \to W'$ zovemo* **ograničeni morfizam** *ako za sve svjetove $w, v \in W$ te $v' \in W'$ vrijedi:*

- *(at)* $w \in V(p)$ *ako i samo ako* $f(w) \in V'(p)$*, za svaku propozicionalnu varijablu* p
- *(forth)* *ako* wRv *onda* $f(w)R'f(v)$
- *(back)* *ako* $f(w)R'v'$ *onda postoji svijet* $v \in W$ *takav da je* wRv *i* $f(v) = v'$.

Primjer 1.21. *Neka je $\mathfrak{M} = (\{w_1, w_2, w_3\}, \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_1)\}, V)$ i neka je $\mathfrak{M}' = (\{w\}, \{(w, w)\}, V')$, pri čemu je $V(p) = V'(p) = \emptyset$ za svaku varijablu p. Tada je funkcija $f : W \to W'$ definirana sa $f(1) = f(2) = f(3) = w$, ograničeni morfizam. Ovaj primjer ilustriramo sljedećom slikom.*



Propozicija 1.22. *Neka su* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *i* $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ *modeli i neka je* $f : W \to W'$ *ograničeni morfizam. Tada za svaku modalnu formulu* φ *i za svaki svijet* $w \in W$ *vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', f(w) \Vdash \varphi.$$

Dokaz. Tvrdnja se dokazuje indukcijom po složenosti formule. U slučaju $\varphi = \perp$ tvrdnja očito vrijedi, a u slučaju $\varphi = p \in Prop$ slijedi iz uvjeta (at) iz definicije ograničenog morfizma.

U koraku indukcije razmatramo slučajeve obzirom na oblik formule. U slučaju da je φ oblika $\neg\psi$, ako je $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$, onda $\mathfrak{M}, w \nVdash \psi$, pa po pretpostavci indukcije $\mathfrak{M}', f(w) \nVdash \psi$, tj. $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \neg\psi$. Obrat je sličan. Analogno se tvrdnja dokazuje i u slučaju disjunkcije.

U slučaju formule oblika $\Diamond\psi$, ako je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$, onda postoji svijet v tako da je wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Tada iz pretpostavke indukcije slijedi $\mathfrak{M}', f(v) \Vdash \psi$, a uvjet (forth) iz definicije ograničenog morfizma povlači $f(w)R'f(v)$, pa vrijedi $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \Diamond\psi$. Obratno, ako $\mathfrak{M}', f(w) \Vdash \Diamond\psi$, onda postoji svijet v' tako da je $f(w)R'v'$ i $\mathfrak{M}', v' \Vdash \psi$. Iz uvjeta (back) iz definicije ograničenog morfizma slijedi da postoji svijet $v \in W$ tako da je wRv i $f(v) = v'$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$ i stoga $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. Q.E.D.

Ograničene morfizme primjenjujemo u dokazu da za svaku ispunjivu modalnu formulu postoji model koji je stablo.

Propozicija 1.23. *Za svaki točkovno generirani model* $\mathfrak{M}$ *postoji model* $\mathfrak{M}'$ *tako da mu je pripadni okvir stablo i postoji surjektivni ograničeni morfizam s* $\mathfrak{M}'$ *u* $\mathfrak{M}$*. Posebno, svaka ispunjiva modalna formula je istinita u korijenu nekog modela čiji pripadni okvir je stablo.*

Dokaz. Neka je w korijen od $\mathfrak{M}$. Definiramo model $\mathfrak{M}'$ ovako:

a) W' je skup svih konačnih nizova oblika $(w, u_1, \ldots, u_n)$ takvih da je $n \geqslant 0$ i vrijedi $wRu_1R\ldots Ru_n$

b) $(w, u_1, \ldots, u_n)R'(w, v_1, \ldots, v_m)$ ako i samo ako je $m = n+1$, $u_i = v_i$ za $i = 1, \ldots, n$ i vrijedi u_nRv_m

c) $(w, u_1, \ldots, u_n) \in V'(p)$ ako i samo ako $u_n \in V(p)$.

Očito je (W', R') stablo s korijenom (w). Lako je provjeriti da je funkcija $f : W' \to W$ koja je definirana s $f(w, u_1, \ldots, u_n) = u_n$, surjektivni ograničeni morfizam.

Kako bismo dokazali drugu tvrdnju, pretpostavimo da je formula φ istinita u svijetu w nekog modela. Neka je $\mathfrak{M}$ njegov podmodel generiran s w. Tada iz propozicije 1.19 slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Iz prvog dijela dokaza ove propozicije znamo da postoji model $\mathfrak{M}'$ baziran na stablu i ograničeni morfizam f s $\mathfrak{M}'$ u $\mathfrak{M}$ takav da je $f((w)) = w$. Iz prethodne propozicije 1.22 slijedi $\mathfrak{M}', (w) \Vdash \varphi$. Q.E.D.

Konstrukciju stabla od danog modela iz dokaza prethodne propozicije zovemo **raspetljavanje**.

1.4 Bisimulacije

Sada uvodimo najvažnije relacije među modelima. To su bisimulacije. Posebno ćemo istaknuti da se disjunktne unije, generirani podmodeli te ograničeni morfizmi mogu razmatrati kao posebne vrste bisimulacija. Dokazat ćemo da su bisimulirani svjetovi nužno modalno ekvivalentni. Navest ćemo primjer koji ilustrira da obrat ne vrijedi, tj. modalno ekvivalentni svjetovi nisu nužno bisimulirani. Na kraju ćemo dokazati Hennessy-Milnerov teorem koji tvrdi da obrat vrijedi za neke posebne vrste modela.

Propozicija 1.24. *Neka je skup svih propozicionalnih varijabli konačan. Tada vrijedi:*

a) *za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji samo konačno mnogo fromula stupnja najviše n do na logičku ekvivalenciju,*

b) *za svaki $n \in \mathbb{N}$, za svaki model $\mathfrak{M}$ i svaki svijet $w \in \mathfrak{M}$ skup svih formula stupnja najviše n koje su istinite na svijetu w, ekvivalentan je jednoj formuli.*

Ako je $\mathfrak{M}$ model i $w \in \mathfrak{M}$ neki svijet, tada uređeni par $(\mathfrak{M}, w)$ nazivamo **točkovni model**.

Definicija 1.25. *Neka su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ dva točkovna modela, te $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da su ti točkovni modeli n–***ekvivalentni** *ako za svaku formulu φ za koju vrijedi $\delta(\varphi) \le n$, imamo:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi.$$

Oznaka: $(\mathfrak{M}, w) \equiv_n (\mathfrak{M}', w')$, odnosno ponekad samo kratko $w \equiv_n w'$.

Ako vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \equiv_0 (\mathfrak{M}', w')$ tada kažemo još da su svjetovi w i w' **atomarno ekvivalentni**.

Definicija 1.26. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ modeli.* **Bisimulacija** *između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ je neprazna relacija $Z \subseteq W \times W'$ takva da vrijedi:*

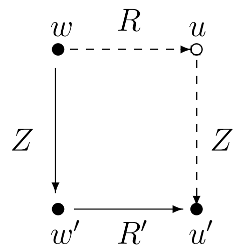
(at) *ako je wZw' onda za svaku propozicionalnu varijablu p vrijedi:*

$$w \in V(p) \quad \textit{ako i samo ako} \quad w' \in V'(p).$$

(forth) *ako je wZw' i wRu onda postoji svijet u' takav da je uZu' i $w'R'u'$. Upravo navedeni uvjet ilustriramo slikom pri čemu punim crtama označavamo relacije čija egzistencija se pretpostavlja, a s isprekidanim crtama označavamo relacije čija se egzistencija traži.*

$$\begin{tikzcd}
w \arrow[r, "R"] \arrow[d, "Z"'] & u \arrow[d, dashed, "Z"] \\
w' \arrow[r, dashed, "R'"'] & u'
\end{tikzcd}$$

(back) *ako je wZw' i $w'R'u'$ onda postoji svijet u takav da je uZu' i wRu.*
Upravo formulirani uvjet (back) također ilustriramo slikom.



Kažemo da su svjetovi w i w' **bisimulirani** *ako je wZw'. Oznaka: $w \underline{\leftrightarrow} w'$.*

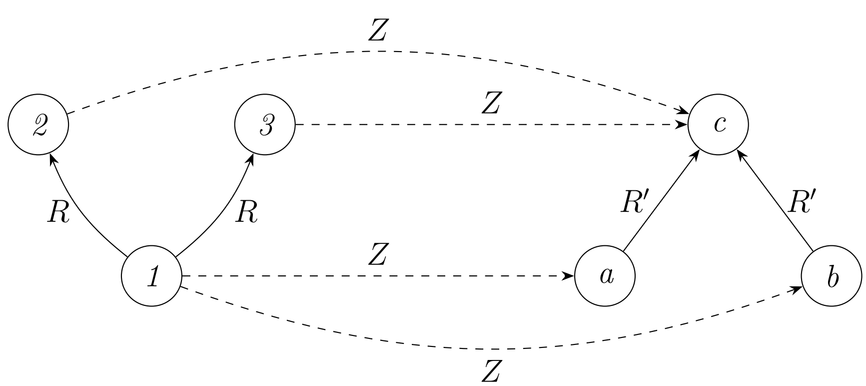
Primjer 1.27. *Disjunktna unija, generirani podmodel i ograničeni morfizam su primjeri bisimulacija. Što točno pod time mislimo, navodimo u nastavku.*

a) *Relacija $\{(w, w) : w \in W_i\}$ je jedna bisimulacija između disjunktne unije $\biguplus_i \mathfrak{M}_i$ i bilo kojeg modela $\mathfrak{M}_i$.*

b) *Relacija $\{(w, w) : w \in W'\}$ jedna bisimulacija između zadanog modela $\mathfrak{M}$ i njegovog proizvoljnog generiranog podmodela $\mathfrak{M}'$.*

c) *Ako je f ograničeni morfizam između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ onda je $\{(w, f(w)) : w \in W\}$ jedna bisimulacija između tih modela.*

d) *Neka je $\mathfrak{M} = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (1, 3)\}, V)$ i $\mathfrak{M}' = (\{a, b, c\}, \{(a, c), (b, c)\}, V')$, gdje je $V(p) = V'(p) = \emptyset$. Lako je provjeriti da je $Z = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, c)\}$ jedna bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$. Važno je naglasiti da se bisimulacija Z ne može dobiti iz ranije definiranih konstrukcija, tj. pomoću disjunktne unije, generiranog podmodela i ograničenog morfizma. Na sljedećoj slici je ilustracija ovog primjera.*



Teorem 1.28. *Neka je Z bisimulacija između modela $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$. Tada za svaku modalnu formulu φ, te za sve svjetove $w \in W$ i $w' \in W'$ takve da je wZw', vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

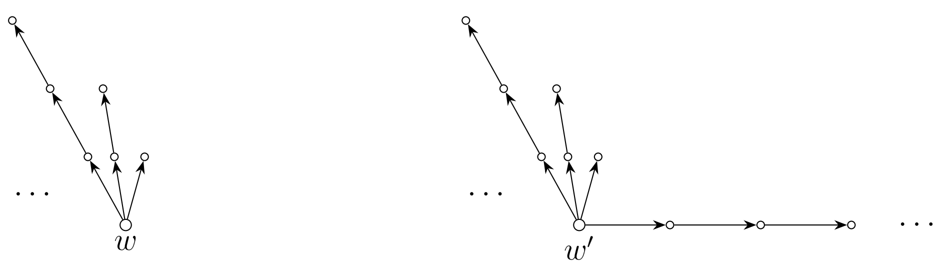
$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', w' \Vdash \varphi.$$

Odnosno, ako $w \underline{\leftrightarrow} w'$ tada $w \equiv w'$.

Dokaz. Tvrdnja se dokazuje indukcijom po složenosti formule. Razmatramo samo slučaj u koraku indukcije za formule oblika $\Diamond\psi$. Neka je $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi$. Tada postoji svijet v takav da je wRv i $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi$. Iz uvjeta (forth) iz definicije bisimulacije slijedi da postoji svijet v' takav da je $w'R'v'$ i vZv'. Iz pretpostavke indukcije slijedi $\mathfrak{M}', v' \Vdash \psi$ i stoga $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Diamond\psi$. Obrat se dokazuje analogno koristeći uvjet (back). Q.E.D.

Iz prethodnog primjera vidimo da su propozicije o invarijantnosti istinitosti modalnih formula na disjunktne unije, generirane podmodele i ograničene morfizme posljedice prethodnog teorema. Obrat prethodnog teorema ne vrijedi. Drugim riječima, modalno ekvivalentni svjetovi nisu nužno bisimulirani.

Primjer 1.29. *Neka je $\mathfrak{M}$ model baziran na stablu s korijenom w i granama duljine n za svaki $n > 0$. Zatim, neka je $\mathfrak{N}$ model s korijenom w' koji također ima sve grane kao model $\mathfrak{M}$ i dodatno jednu prebrojivo beskonačnu granu. Definiramo $V(p) = V'(p) = \emptyset$ za svaku propozicionalnu varijablu p. Nije teško provjeriti da vrijedi ekvivalencija: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{N}, w' \Vdash \varphi$, za svaku modalnu formulu φ. Međutim, svjetovi w i w' nisu bisimulirani. Naime, lako se vidi da neposredni sljedbenik svijeta w' na beskonačnoj grani ne može biti u bisimulaciji ni s jednim svijetom modela $\mathfrak{M}$. Upravo definirane modele ilustriramo na sljedećoj slici.*



Ipak, moguće je dobiti obrat prethodnog teorema uz dodatne uvjete.

Definicija 1.30. *Kažemo da je model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$* **slikovno konačan** *ako je za svaki svijet $w \in W$ skup $R[w] = \{v \in W : wRv\}$ konačan.*

Teorem 1.31 (Hennessy-Milner)**.** *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ slikovno konačni modeli. Tada za sve svjetove $w \in W$ i $w' \in W'$ vrijedi: svjetovi w i w' su modalno ekvivalentni ako i samo ako su bisimulirani.*

Dokaz. Dokazat ćemo da je modalna ekvivalencija među svjetovima modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ (označimo je sa Z) bisimulacija. Uvjet (at) trivijalno vrijedi. Kako bismo dokazali da vrijedi uvjet (forth) iz definicije bisimulacije, pretpostavimo wZw' i wRv. Pretpostavimo suprotno, tj. da ne postoji svijet v' takav da je $w'R'v'$ i vZv'. Neka je $S' = \{u' : w'Ru'\}$. Tada je $S' \neq \emptyset$ jer u suprotnom $\mathfrak{M}', w' \Vdash \Box\bot$, što bi bilo u kontradikciji s wZw' jer $\mathfrak{M}, w \nVdash \Box\bot$ zbog wRv. Nadalje, skup S' je po pretpostavci teorema konačan. Stavimo $S' = \{w'_1, \ldots, w'_n\}$. Prema pretpostavci za svaki svijet $w'_i \in S'$ postoji formula ψ_i takva da je $\mathfrak{M}, v \Vdash \psi_i$, ali $\mathfrak{M}', w'_i \nVdash \psi_i$. Dakle, imamo $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$, ali $\mathfrak{M}', w' \nVdash \Diamond(\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_n)$, što je u kontradikciji s wZw'.

Analogno se dokazuje da vrijedi uvjet (back) iz definicije bisimulacije. Q.E.D.

Napomena 1.32. *Lako je provjeriti da vrijedi:*

a) Kompozicija bisimulacija je bisimulacija.

b) Proizvoljna unija bisimulacija između danih modela je bisimulacija. Ako postoji barem jedna bisimulacija između neka dva modela, tada postoji najveća bisimulacija između danih modela.

1.5 Bisimulacijske igre

Sada želimo definirati igre na Kripkeovim modelima. Zatim, razmatrat ćemo tzv. konačne bisimulacije.

Definicija 1.33. *Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ Kripkeovi modeli, te $w \in W$ i $w' \in W'$ proizvoljni svjetovi.* **Bisimulacijsku igru** *između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ s početkom u $(\mathfrak{M}, w; \mathfrak{M}', w')$ igraju dva igrača. Označimo ih s I i II. Za igru se koriste i dva kamenčića. Kamenčićima igrači označavaju konfiguraciju igre $(\mathfrak{M}, u; \mathfrak{M},' u')$ ako su kamenčići na svjetovima u i u'.*

Na početku igre prvo se provjeri vrijedi li $w \equiv_0 w'$. Ako to ne vrijedi igra se niti ne počinje, te se definira da je igrač I pobjedio.

Sada opisujemo tijek igre u slučaju kada vrijedi $w \equiv_0 w'$. Pretpostavimo da su u nekom trenutku kamenčići na svjetovima $u \in W$ i $u' \in W'$. Ako ne vrijedi $u \equiv_0 u'$ tada definiramo da je igrač I pobjedio i igra je gotova.

Ako vrijedi $u \equiv_0 u'$ tada u sljedećem potezu igrač I prvo bira jedan od modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$. Zatim, u izabranom modelu bira neki svijet v tako da vrijedi uRv, odnosno $u'R'v'$. Ako takav svijet v ne postoji tada definiramo da je igrač I izgubio igru.

Igrač II radi isto ali u drugom modelu. Ako igrač II ne može izabrati traženi svijet, tj. kamenčić se nalazi na nekom terminalnom svijetu, tada definiramo da je igrač I pobjedio.

U slučaju da igra ne završi u konačno mnogo poteza, tj. beskonačno dugo traje, tada definiramo da je pobijedio igrač II.

Definicija 1.34. *Kažemo da igrač II ima* **pobjedničku strategiju** *u nekoj bisimulacijskoj igri s početkom u $(\mathfrak{M}, w; \mathfrak{M}', w')$ ako uvijek na potez igrača I može odgovoriti potezom koji mu garantira pobjedu.*

Propozicija 1.35. *Igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri s početkom u $(\mathfrak{M}, w; \mathfrak{M}', w')$ ako i samo ako $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$.*

Bisimulacijsku igru u n–poteza definiramo na sasvim analogni način kao (neograničenu) bisimulacijsku igru pri čemu definiramo da ona završava najviše nakon n poteza. Zatim, definiramo da igrač II pobjeđuje nakon n–tog ako je zadnji par izabranih svjetova atomarno ekvivalentan.

Definicija 1.36. *Neka su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ dva točkovna modela, te $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da su ti točkovni modeli:*

a) *n–***bisimulirani** *ako igrač II ima pobjedničku strategiju u bisimulacijskoj igri u n poteza s početkom u $(\mathfrak{M}, w; \mathfrak{M}', w')$.*
   Oznaka: $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_n \mathfrak{M}', w'$;

b) **konačno bisimulirani** *ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_n \mathfrak{M}', w'$.*
   Oznaka: $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_\omega \mathfrak{M}', w'$;

Definicija 1.37. *Neka su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ točkovni modeli i $n \in \mathbb{N}$. Za konačan niz binarnih relacija $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ kažemo da je n–***bisimulacija** *između svjetova w i w', te to označavamo sa $\mathfrak{M}, w \leftrightarrow_n \mathfrak{M}', w$, ako $Z_n \subseteq \ldots \subseteq Z_0 \subseteq W \times W$ i vrijede sljedeći uvjeti:*

a) *wZ_nw'*

b) *za sve svjetove $v \in W$ i $v' \in W'$ takve da vZ_0v', za svaku propozicionalnu varijablu p imamo:*

$$\mathfrak{M}, v \Vdash p \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}', v' \Vdash p.$$

c) *za sve svjetove $u, v \in W$, $u' \in W'$ te svaki $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ za koje vrijedi $uZ_{i+1}u'$ i uRv, postoji svijet $v' \in W'$ tako da imamo vZ_iv' i $u'R'v'$.*
   Upravo navedeni uvjet ilustriramo slikom pri čemu punim crtama označavamo relacije čija egzistencija se pretpostavlja, a s isprekidanim crtama označavamo relacije čija se egzistencija traži.

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, "R"] \arrow[d, "Z_{i+1}"'] & v \arrow[d, dashed, "Z_i"] \\
u' \arrow[r, dashed, "R'"'] & v'
\end{tikzcd}$$

d) *za sve svjetove* $u \in W$, $u', v' \in W'$ *te svaki* $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ *za koje vrijedi* $uZ_{i+1}u'$ *i* $u'R'v'$, *postoji svijet* $u \in W$ *tako da vrijedi* vZ_iv' *i* uRv.
Upravo formulirani uvjet također ilustriramo slikom.

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r, dashed, "R"] \arrow[d, "Z_{i+1}"'] & v \arrow[d, dashed, "Z_i"] \\
u' \arrow[r, "R'"'] & v'
\end{tikzcd}$$

Kako bi izrekli teorem koji povezuje konačne bisimulacije i konačne bisimulacijske igre, definiramo još posebne karakteristične formule za svaki točkovni model.

Nadalje pretpostavljamo da je skup propozicionalnih varijabli $Prop$ konačan.

Definicija 1.38. *Neka je* $\mathfrak{M}$ *Kripkeov model i* w *neki njegov svijet. Za svaku varijablu* $p \in Prop$ *definiramo:*

$$\overline{p} = \begin{cases} p, & \text{ako } \mathfrak{M}, w \Vdash p, \\ \neg p, & \text{inače.} \end{cases}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ *rekurzivno definiramo formulu* $\chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$ *ovako:*

$$\chi^0_{[\mathfrak{M},w]} \equiv \bigwedge_{p \in Prop} \overline{p},$$

$$\chi^{n+1}_{[\mathfrak{M},w]} \equiv \chi^0_{[\mathfrak{M},w]} \wedge \bigwedge_{u \in W,\ wRu} \Diamond \chi^n_{[\mathfrak{M},u]} \wedge \Box \bigvee_{u \in W,\ wRu} \chi^n_{[\mathfrak{M},u]}.$$

Teorem 1.39. *Neka su* $(\mathfrak{M}, w)$ *i* $(\mathfrak{M}', w')$ *točkovni modeli. Neka je skup Prop svih propozicionalnih varijabli konačan. Tada su za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a) $\mathfrak{M}, w \equiv_n \mathfrak{M}', w'$

b) $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_n \mathfrak{M}', w'$

c) $\mathfrak{M}, w \leftrightarrow_n \mathfrak{M}', w'$

d) $\mathfrak{M}', w' \Vdash \chi^n_{[\mathfrak{M},w]}$.

Korolar 1.40. *Neka je skup svih propozicionalnih varijabli Prop konačan. Tada za sve točkovne modele* $(\mathfrak{M}, w)$ *i* $(\mathfrak{M}', w')$ *vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_\omega \mathfrak{M}', w' \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'.$$

Napomena 1.41. *Rezimirajmo ovdje sve tvrdnje o bisimulacijama i elementarnoj ekvivalenciji na Kripkeovim modelima.*

Ako $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$ *tada* $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$. *Obrat općenito ne vrijedi. Ako su modeli slikovno konačni tada vrijedi obrat (Hennessy–Milnerov teorem).*

Ako $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow}_n \mathfrak{M}', w'$ tada $\mathfrak{M}, w \equiv_n \mathfrak{M}', w'$. Obrat općenito ne vrijedi. Ako je skup svih propozicionalnih varijabli konačan tada vrijedi i obrat.

Napomena 1.42. *U primjeru 1.29 naveli smo dva modela za čiji smo par svjetova tvrdili da su modalno ekvivalentni ali nisu bisimulirani. Primjenom bisimulacijskih igara sada možemo lako dokazati da svjetovi w i w' nisu bisimulirani. Lako je vidjeti da igrač I ima pobjedničku strategiju u svakoj konačnoj igri s početkom $(\mathfrak{M}, w; \mathfrak{N}, w')$ jer igrač I izabere model $\mathfrak{N}$ i njegovu beskonačnu granu.*

Zadaci

1. Dokažite propoziciju 1.17.
2. Dokažite propoziciju 1.19.
3. Dokažite detaljno propoziciju 1.23.
4. Dokažite propoziciju 1.24.
5. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model. Dokažite da je relacija $\{(w, w) : w \in W\}$ bisimulacija.
6. Neka je Z bismulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$. Dokažite da je tada Z^{-1} također bisimulacija.
7. Dokažite da je kompozicija bisimulacija također bisimulacija.
8. Neka je $\{Z_i : i \in I\}$ familija bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$. Dokažite da je tada $\bigcup_{i \in I}$ također bisimulacija.
9. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli između kojih postoji bisimulacija. Dokažite da tada postoji najveća bisimulacija između danih modela.
10. Dokažite da za svaki model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ postoji najveća bisimulacija $Z \subseteq W \times W$. Dokažite da je najveća bisimulacija relacija ekvivalencije.
11. Neka je $\{\mathfrak{M}_i = (W_i, R_i.V_i) : i \in I\}$ familija u parovima disjunktnih modela. Dokažite da je relacija $\{(w, w) : w \in W_i\}$ bisimulacija između disjunktne unije $\biguplus_i \mathfrak{M}_i$ i bilo kojeg modela $\mathfrak{M}_i$.
12. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ neki model i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ neki njegov generirani podmodel. Dokažite da je relacija $\{(w, w) : w \in W'\}$ bisimulacija između modela $\mathfrak{M}$ i generiranog podmodela $\mathfrak{M}'$.
13. Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli i $f : W \to W'$ ograničeni morfizam. Dokažite da je $\{(w, f(w)) : w \in W\}$ jedna bisimulacija između tih modela.
14. Dokažite da se bisimulacija Z iz primjera 1.27 ne može dobiti pomoću disjunktne unije, generiranog podmodela i ograničenog morfizma.

15. Dokažite da su svjetovi w i w' iz primjera 1.29 modalno ekvivalentni.
16. Dokažite propoziciju 1.35.
17. Dokažite teorem 1.39.
18. Neka su $\mathfrak{F} = (W, R)$ i $\mathfrak{F}' = (W', R')$ Kripkeovi okviri te $Z \subseteq W \times W'$. Označimo s $D(Z)$ skup svih uređenih parova $(w, w') \in Z$ koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

    a) ako wRv tada postoji svijet $v' \in W'$ takav da $w'R'v'$ i vZv'
    b) ako $w'R'v'$ tada postoji sviejt $v \in W$ takav da wRv i vZv'.

    Za svaki ordinalni broj α definiramo relaciju Z_α rekurzivno ovako:

$$\begin{array}{rcl} Z_0 & = & Z \\ Z_{\alpha+1} & = & D(Z_\alpha) \\ Z_\beta & = & \bigcap\{Z_\alpha : \alpha < \beta\}, \quad \text{ako je } \beta \text{ granični ordinal} \end{array}$$

    Dokažite da vrijedi:

    > neprazna relacija Z_α je fiksna točka operatora D ako i samo ako Z_α je bisimulacija Kripkeovih okvira.

    (Mi smo definirali pojam bisimulacije modela, a u ovom zadatku govorimo o bisimulaciji okvira. Bisimulacija okvira je relacija koja ima svojstva (forth) i (back).)

19. Dokažite da za svaki Kripkeov okvir $\mathfrak{F}$ postoji familija okvira $\{\mathfrak{A}_i : i \in I\}$ tako da vrijedi:

    a) za svaki $i \in I$ okvir $\mathfrak{A}_i$ izomorfan je nekom podokviru od $\mathfrak{F}$ koji je generiran jednim svijetom
    b) postoji surjektivni ograničeni morfizam $f : \biguplus_{i \in I} \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{F}$.

    (U ovom zadatku govorimo o ograničenim morfizmima okvira. Nadamo se da je jasno kako se definira taj pojam.)

20. Neka je sa $\mathcal{C}$ označen operator koji ima svojstvo da za svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w)$ i svaku modalnu formulu φ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \mathcal{C}\varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \Vdash \varphi$$

    Dokažite da operator $\mathcal{C}$ nije moguće definirati pomoću osnovnog modalnog jezika, tj. da ne postoji modalna formula ψ tako da za svaku modalnu formulu φ, te svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w)$ i vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M} \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M}, w \Vdash \psi.$$

1.6 Metoda filtracije

U ovoj točki razmatramo jednu metodu kojom iz zadanog modela dobivamo konačni model s posebnim svojstvima. Istaknut ćemo lemu o filtraciji koja će nam bitna u daljnjim razmatranjima.

Definicija 1.43. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ Kripkeov model i Γ skup formula zatvoren na potformule. Definiramo binarnu relaciju $\sim_\Gamma$ tako da za svjetove $w, u \in W$ definiramo $w \sim_\Gamma u$ ako za svaku formulu $\varphi \in \Gamma$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}, u \Vdash \varphi.$$

Očito je $\sim_\Gamma$ relacija ekvivalencije na skupu W. Za svaki svijet $w \in W$ sa $[w]_\Gamma$ označavamo pripadnu klasu ekvivalencije. Označimo $W^f = \{[w]_\Gamma : w \in W\}$.

Na skupu W^f definiramo valuaciju V^f ovako:

$$[w]_\Gamma \in V^f(p) \quad \textit{ako i samo ako} \quad p \in \Gamma \quad \textit{i} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash p.$$

Lako je vidjeti da definicija valuacije V^f ne ovisi o izboru reprezentanta.

Kažemo da je model $\mathfrak{M}^f = (W^f, R^f, V^f)$ **filtracija modela $\mathfrak{M}$** *u odnosu na skup formula Γ ako za svaku formulu $\varphi \in \Gamma$ i za svaki svijet $w \in W$ vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}^f, [w]_\Gamma \Vdash \varphi.$$

Kasnije ćemo odgovoriti na pitanje kako definirati relaciju R^f. Nećemo dati jednoznačan odgovor, već ćemo dati uvjete koje relacija R^f treba zadovoljavati kako bi model $\mathfrak{M}^f$ bio filtracija modela $\mathfrak{M}$.

Lema 1.44 (o filtraciji)**.**
Neka je $\mathfrak{M}$ model, Γ skup formula zatvoren na potformule, te skup W^f i valuacija V^f definirani kao malo prije. Neka je $R^f \subseteq W_\Gamma \times W_\Gamma$ relacija tako da vrijedi:

(MIN) *za sve svjetove $w, u \in W$ takve da je wRu vrijedi $[w]_\Gamma R^f [u]_\Gamma$*

(MAX) *za sve svjetove $w, u \in W$ takve da je $[w]_\Gamma R^f [u]_\Gamma$ te za svaku formulu $\Diamond\varphi \in \Gamma$ takvu da $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$, vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$.*

Tada je $\mathfrak{M}^f = (W^f, R^f, V^f)$ filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na skup formula Γ.

Tvrdnja leme se lako dokaže indukcijom po složenosti formule $\varphi \in \Gamma$.

Uočimo da još nije dokazana egzistencija filtracije za proizvoljan Kripkeov model. Neka je $\mathfrak{M}$ Kripkeov model i Γ skup formula zatvoren na potformule. Definiramo binarne relacije R_Γ^{min} i R_Γ^{max} na skupu W_Γ ovako:

a) $R_\Gamma^{min} = \{([w]_\Gamma, [u]_\Gamma) : wRu\}$

b) $[w]_\Gamma R_\Gamma^{max} [u]_\Gamma$ ako i samo ako za svaku formulu $\Diamond\varphi \in \Gamma$ takvu da $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$.

Uočimo da je $R_\Gamma^{min} \subseteq R_\Gamma^{max}$. Zaista, neka je $[w]_\Gamma R_\Gamma^{min} [u]_\Gamma$ i neka je $\Diamond\varphi \in \Gamma$ formula tako da vrijedi $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$. Treba dokazati $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$. Kako je $[w]_\Gamma R_\Gamma^{min} [u]_\Gamma$, to postoje svjetovi $w' \in [w]_\Gamma$ i $u' \in [u]_\Gamma$ takvi da je $w'Ru'$. Sada zbog $u' \in [u]_\Gamma$ imamo $u \sim_\Gamma u'$ i stoga $\mathfrak{M}, u' \Vdash \varphi$. Dakle, $\mathfrak{M}, w' \Vdash \Diamond\varphi$. Kako je $w' \in [w]_\Gamma$, to je $w \sim_\Gamma w'$ i stoga $\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi$, što je i trebalo dokazati.

Lema 1.45. *Neka je $\mathfrak{M}$ model, Γ skup formula zatvoren na potformule, te skup W^f i V^f valuacija definirani kao malo prije. Tada za svaku relaciju R^f takvu da je $R_\Gamma^{min} \subseteq R^f \subseteq R_\Gamma^{max}$ vrijedi da je $\mathfrak{M}^f = (W^f, R^f, V^f)$ filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na skup formula Γ.*

Dokaz. Iz leme o filtraciji slijedi da je dovoljno dokazati da relacija R^f zadovoljava uvjete (MIN) i (MAX).

Neka su $w, u \in W$ svjetovi takvi da vrijedi wRu. Iz definicije relacije R_Γ^{min} tada slijedi $[w]_\Gamma R_\Gamma^{min} [u]_\Gamma$. Kako je $R_\Gamma^{min} \subseteq R^f$, to je $[w]_\Gamma R^f [u]_\Gamma$. To znači da vrijedi uvjet (MIN).

Neka je sada $[w]_\Gamma R^f [u]_\Gamma$ i neka je $\Diamond\varphi \in \Gamma$ formula tako da vrijedi $\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi$. Kako je $R^f \subseteq R_\Gamma^{max}$, to je $[w]_\Gamma R_\Gamma^{max} [u]_\Gamma$. Iz definicije relacije R_Γ^{max} slijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Dakle, vrijedi uvjet (MAX). Q.E.D.

Teorem 1.46. *(svojstvo konačnih modela)*
Neka je φ ispunjiva modalna formula. Tada postoji konačan model $\mathfrak{M}$ i svijet $w \in W$ tako da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Štoviše, postoji Kripkeov model $\mathfrak{M}$ s najviše 2^m svjetova, gdje je m broj svih potformula formule φ.

Dokaz. Neka je $\mathfrak{N}$ model i $u \in \mathfrak{N}$ svijet tako da vrijedi $\mathfrak{N}, u \Vdash \varphi$. Neka je Γ skup svih potformula formule φ. Neka je $\mathfrak{M}$ filtracija modela $\mathfrak{N}$ u odnosu na skup formula Γ (relacija dostiživosti R^f je proizvoljna, ali takva da vrijedi $R_\Gamma^{min} \subseteq R^f \subseteq R_\Gamma^{max}$). Označimo $w = [u]_\Gamma$. Tada model $\mathfrak{M}$ ima najviše 2^m svjetova (jer Γ ima 2^m podskupova, pa relacija $\sim_\Gamma$ može imati najviše 2^m klasa ekvivalencije) i vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Q.E.D.

Napomena 1.47. *Kako bi mogli dokazati pomoću metode filtracije svojstvo konačnih modela u odnosu na neke klase modela s nekim istaknutim svojstvima, potrebno je da na filtriranom modelu ta svojstva budu očuvana. Lako je dokazati da, primjerice, relacija R_Γ^{min} čuva simetričnost, tj. ako je relacija R simetrična, onda je i relacija R_Γ^{min} simetrična.*

No, to ne vrijedi za tranzitivnost. Nejednoznačnost filtracije koristimo kako bismo pogodno definirali relaciju R^f radi očuvanja željenog svojstva relacije dostiživosti R. Kako bi imali sačuvanu tranzitivnost, definiramo relaciju R^f na skupu W^f ovako:

$$[w]_\Gamma R^f [u]_\Gamma \text{ ako i samo ako za svaku formulu } \Diamond\varphi \in \Gamma \text{ za koju vrijedi } \mathfrak{M}, u \Vdash \varphi \vee \Diamond\varphi \text{ imamo } \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi.$$

Nije teško dokazati da ako je R tranzitivna, onda je (W^f, R^f, V^f) filtracija i relacija R^f je tranzitivna.

Zadaci

1. Dokažite da je relacija $\sim_\Gamma$ iz definicije 1.43 jedna relacija ekvivalencije.
2. Dokažite da definicija valuacije V^f iz definicje 1.43 ne ovisi o izboru reprezentanata.
3. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model te neka je Γ neki skup formula zatvoren na potformule. Dokažite da je preslikavanje $w \mapsto [w]_\Gamma$ homomorfizam, ali općenito nije ograničeni morfizam.
4. Dokažite lemu o filtraciji.
5. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model, pri čemu je relacija dostiživosti R tranzitivna. Neka je Γ neki skup formula zatvoren na potformule. Na skupu W^f definiramo binarnu relaciju R^f ovako:

$$\begin{array}{ll} [w]_\Gamma R^f [u]_\Gamma \text{ ako i samo} & \text{ako za svaku formulu } \Diamond\varphi \in \Gamma \text{ za koju vrijedi} \\ & \mathfrak{M}, u \Vdash \varphi \vee \Diamond\varphi \text{ imamo } \mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\varphi. \end{array}$$

   Dokažite da je relacija R^f tranzitivna. Dokažite da je (W^f, R^f, V^f) filtracija modela $\mathfrak{M}$ u odnosu na skup formula Γ.

6. Za okvir, odnosno model, kažemo da je euklidski ako za sve svjetove $x, y, z \in W$ vrijedi da iz xRy i xRz slijedi yRz. Označimo s $\mathcal{E}$ klasu svih euklidskih modela. Neka je φ proizvoljna formula. Označimo s Γ najmanji skup formula koji je zatvoren za potformule i sadrži formulu φ, te za svaku formulu ψ takvu da je $\Diamond\psi \in \Gamma$ vrijedi $\Box\Diamond\psi \in \Gamma$.

   a) Dokažite da za svaku formulu ψ vrijedi $\mathcal{E} \Vdash \Diamond\psi \to \Box\Diamond\psi$.

   b) * Dokažite da svaki euklidski model može biti filtriran u odnosu na skup formula Γ do nekog euklidskog modela.

   c) Dokažite da su u svakom euklidskom modelu ispunjeni sljedeći redukcijski principi: $\Diamond\Diamond\Diamond \leftrightarrow \Diamond\Diamond$, $\Diamond\Diamond\Box \leftrightarrow \Diamond\Box$, $\Diamond\Box\Diamond \leftrightarrow \Diamond\Diamond$ i $\Diamond\Box\Box \leftrightarrow \Diamond\Box$.
   (To zapravo znači da treba dokazati, primjerice, da je svaka formula oblika $\Diamond\Diamond\Diamond\psi \leftrightarrow \Diamond\Diamond\psi$ istinita u svakom euklidskom modelu.)

   d) Dokažite da je za svaku formulu φ skup Γ konačan do na modalnu ekvivalenciju na euklidskim modelima.

   e) Dokažite da osnovna modalna logika ima svojstvo konačnih modela u odnosu na klasu $\mathcal{E}$.

Poglavlje 2

Potpunost modalnih logika

U ovom poglavlju prvo definiramo najmanju normalnu modalnu logiku koja se označava sa K. Želimo naglasiti da normalne modalne logike promatramo kao hilbertovske sisteme, tj. zadati ćemo ih tako da navedemo njihove aksiome i pravila izvoda. Za svaki od definiranih sistema navest ćemo teoreme adekvatnosti i potpunosti u odnosu na odgovarajuću klasu Kripkeovih okvira. Samo za sistem K dokazat ćemo teorem potpunosti. Na samom kraju dajemo napomenu o nepotpunim modalnim sistemima u odnosu na Kripkeovu semantiku.

2.1 Najmanja normalna modalna logika K

U ovom dijelu prvo definiramo modalnu logiku K. Glavni cilj nam je dokazati teorem potpunosti, tj. da je svaka valjana modalna formula teorem sistema K. Dokaz teorema potpunosti za sistem K sasvim je analogan dokazu teorema potpunosti za klasičnu logiku sudova, tj. za sistem RS (vidi [5]). To znači da ćemo definirati pojam dokaza i izvoda, istaknuti teorem dedukcije, razmatrati svojstva (maksimalno) konzistentnih skupova te istaknuti Lindenbaumovu lemu i lemu o istinitosti. Jedna od specifičnosti je sada lema o egzistenciji.

Definicija 2.1. *Skup aksioma sistema K sadrži sve tautologije (u novom jeziku!) te sljedeću shemu aksioma:*

$$\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi),$$

koja se naziva aksiom distributivnosti. Pravila izvoda sistema K su sljedeća:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \to \psi}{\psi} \text{ (modus ponens)} \qquad\qquad \frac{\varphi}{\Box\varphi} \text{ (nužnost)}$$

Pojam dokaza i teorema sistema K se definira sasvim na isti način kao u logici sudova. Ako je formula φ teorem sistema K tada to označavamo sa $\vdash_K \varphi$.

Teorem 2.2. *(o adekvatnosti sistema K)*
Ako $\vdash_K \varphi$ tada je φ valjana formula.

Sada nam je cilj dokazati obrat prethodnog teorema, tj. dokazati teorem potpunosti za sistem K. Željeli bi primijeniti slično zaključivanje kao kod dokaza teorema potpunosti za logiku sudova: svojstva konzistentnih skupova, Lindenbaumova lema i lema o istinitosti, te kao jednostavnu posljedicu dobiti teorem potpunosti. Važan alat prilikom dokaza navedenih tvrdnji je teorem dedukcije. U sljedećoj napomeni želimo istaknuti probleme u vezi toga.

Napomena 2.3. *Neka je Γ skup formula i φ neka formula. U ovoj napomeni (i samo ovdje!) definirajmo da je formula φ izvediva iz skupa Γ u sistemu K na sasvim isti način kao u logici sudova, tj. zahtjevamo da postoji konačan niz formula $\psi_1, \ldots, \psi_n$ tako da vrijedi:*

a) $\psi_n \equiv \varphi$

b) *za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi barem jedno od:*

- b_1) *formula ψ_i je aksiom sistema K*
- b_2) *formula ψ_i je element skupa Γ*
- b_3) *formula ψ_i je nastala primjenom pravila izvoda modus ponens ili nužnosti iz nekih formula ψ_j i ψ_k, pri čemu vrijedi $j, k < i$.*

Ako je formula φ izvediva iz skupa Γ u sistemu K tada to označavamo s $\Gamma \vdash_K \varphi$.

No, uz ovakvu "standardnu" definiciju izvoda u sistemu K ne vrijedi teorem dedukcije, jer očito tada vrijedi $\{p\} \vdash_K \Box p$, ali budući da $p \to \Box p$ nije valjana formula tada iz teorema adekvatnosti slijedi $\nvdash_K p \to \Box p$.

Budući da nam je teorem dedukcije iznimno važan dajemo nešto izmijenjenu definiciju izvoda.

Definicija 2.4. *Neka je Γ skup formula i φ neka formula. Kažemo da je* **formula** φ **izvediva iz skupa** Γ **u sistemu** K *ako vrijedi $\vdash_K \varphi$ ili postoje formule $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ tako da $\vdash_K (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \varphi$. Ako je formula φ izvediva iz skupa Γ u sistemu K tada to označavamo sa $\Gamma \vdash_K \varphi$.*

Teorem 2.5. *(Teorem dedukcije za sistem K)*
Ako $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_K \psi$ tada $\Gamma \vdash_K \varphi \to \psi$.

Teorem je jednostavno dokazati razmatranjem sljedeća dva slučaja: $\vdash_K \psi$ ili postoje formule $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma \cup \{\varphi\}$ tako da $\vdash_K (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \psi$.

Definicija 2.6. *Za skup formula Γ kažemo da je* **konzistentan u sistemu** K *ako vrijedi $\Gamma \nvdash_K \bot$. Inače kažemo da je skup Γ inkonzistentan.*

Nadalje nećemo isticati da se radi o konzistentnom skupu u sistemu K. Kratko ćemo samo reći da je skup konzistentan, odnosno inkonzistentan.

Lema 2.7. *(Svojstva konzistentnih skupova u sistemu K)*
Vrijede sljedeće tvrdnje:

a) Svaki podskup konzistentnog skupa je konzistentan. Svaki nadskup inkonzistentnog skupa je inkonzistentan.

b) Skup Γ *je konzistentan ako i samo ako ne postoji formula* φ *tako da vrijedi* $\Gamma \vdash_K \varphi$ *i* $\Gamma \vdash_K \neg\varphi$.

c) Skup Γ *je konzistentan ako i samo ako svaki konačan podskup skupa* Γ *je konzistentan.*

d) Skup Γ *je konzistentan ako i samo ako postoji formula* φ *tako da vrijedi* $\Gamma \nvdash_K \varphi$.

e) Ako $\Gamma \nvdash_K \varphi$ *tada je skup* $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *konzistentan.*

f) Ako $\Gamma \nvdash_K \neg\varphi$ *tada je skup* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *konzistentan.*

g) Ako $\Gamma \vdash_K \varphi$ *i skup* Γ *je konzistentan tada je i skup* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *konzistentan.*

Sve tvrdnje prethodne leme dokazuju se sasvim na analogni način kao u logici sudova, što možete vidjeti, primjerice, u [5] (u dokazu se koristi teorem dedukcije.)

Definicija 2.8. *Za skup formula* Γ *kažemo da je* **maksimalno konzistentan u sistemu** *K ako je konzistentan i svaki njegov pravi nadskup je inkonzistentan.*

Ako je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ Kripkeov model i $w \in W$ proizvoljan svijet tada je skup $\{\varphi : \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi\}$ maksimalno konzistentan.

Lema 2.9. *Neka je* Γ *neki maksimalno konzistentan skup. Tada za sve formule* φ *i* ψ *vrijedi:*

a) Ako $\varphi, \varphi \to \psi \in \Gamma$ *tada* $\psi \in \Gamma$

b) $\varphi \in \Gamma$ *ili* $\neg\varphi \in \Gamma$

c) Ako $\vdash_K \varphi$ *tada* $\varphi \in \Gamma$

d) $\neg\varphi \in \Gamma$ *ako i samo ako* $\varphi \notin \Gamma$

e) $\varphi \wedge \psi \in \Gamma$ *ako i samo ako* $\varphi \in \Gamma$ *i* $\psi \in \Gamma$

f) $\varphi \vee \psi \in \Gamma$ *ako i samo ako* $\varphi \in \Gamma$ *ili* $\psi \in \Gamma$.

Dokaz sljedeće leme je sasvim analogan kao u logici sudova.

Lema 2.10. *(Lindenbaumova lema za sistem K)*
Za svaki konzistentan skup postoji maksimalno konzistentan nadskup.

U dokazu leme o istinitosti za sistem RS (za klasičnu logiku sudova) definira se jedna posebna interpretacija. Budući da u modalnoj logici više nemamo interpretacije kao funkcije sa skupa svih varijabli, definiramo jedan poseban model.

Definicija 2.11. *Za Kripkeov model* (W, R, V) *kažemo da je* **kanonski model** *ako vrijedi:*

a) W *je skup svih maksimalno konzistentnih skupova*

b) wRu *ako i samo ako za svaku formulu* φ *činjenica* $\varphi \in u$ *povlači* $\Diamond\varphi \in w$

c) $w \in V(p)$ *ako i samo ako* $p \in w$, *za svaku propozicionalnu varijablu* p.

Lema 2.12. *Neka je* (W, R, V) *kanonski model. Tada za sve svjetove* $w, u \in W$ *vrijedi:*

wRu *ako i samo ako za svaku formulu* φ *činjenica* $\Box\varphi \in w$ *povlači* $\varphi \in u$.

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi wRu, te neka je φ formula tako da imamo $\varphi \notin u$. Iz leme 2.9 slijedi $\neg\varphi \in u$. Sada wRu, $\neg\varphi \in u$ i definicija relacije R u kanonskom modelu povlače $\Diamond\neg\varphi \in w$. Budući da je w konzistentan skup tada $\neg\Diamond\neg\varphi \notin w$, tj. $\Box\varphi \notin w$.

Dokažimo sada obrat. Neka su w i u maksimalno konzistentni skupovi za koje ne vrijedi wRu. Iz definicije relacije dostiživosti u kanonskom modelu tada slijedi da postoji formula φ tako da vrijedi $\varphi \in u$ i $\Diamond\varphi \notin w$. Sada $\Diamond\varphi \notin w$ i lema 2.9 povlače $\neg\Diamond\varphi \in w$. Lako je vidjeti da vrijedi $\vdash_K \neg\Diamond\varphi \to \Box\neg\varphi$. Iz leme 2.9 tada slijedi $\neg\Diamond\varphi \to \Box\neg\varphi \in w$. Sada ovo posljednje i prije dokazana činjenica $\neg\Diamond\varphi \in u$, te lema 2.9, povlače $\Box\neg\varphi \in w$. Budući da imamo $\varphi \in u$ tada očito $\neg\varphi \notin u$. Rezimirajmo: pretpostavka da ne vrijedi wRu povlači da postoji formula φ tako da vrijedi $\Box\neg\varphi \in w$ i $\neg\varphi \notin u$. Q.E.D.

Lema 2.13. *(o egzistenciji za sistem* K*)*
Neka je (W, R, V) *kanonski model te* $w \in W$ *proizvoljan svijet. Ako je* φ *formula takva da* $\Diamond\varphi \in w$ *tada postoji svijet* $u \in W$ *tako da vrijedi* wRu *i* $\varphi \in u$.

Dokaz. Definiramo $v^- = \{\varphi\} \cup \{\psi : \Box\psi \in w\}$. Pretpostavimo da je skup v^- inkonzistentan. Tada za svaku formulu ψ vrijedi $v^- \vdash_K \psi$, a onda posebno $v^- \vdash_K \neg\varphi$. Iz definicije izvoda slijedi da su moguća sljedeća dva slučaja: $\vdash_K \neg\varphi$ ili postoje formule $\psi_1, \ldots, \psi_n \in v^-$ tako da vrijedi $\vdash_K (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \neg\varphi$. Ako $\vdash_K \neg\varphi$ tada očito $\vdash_K \Box\neg\varphi$, a onda lema 2.9 povlači $\Box\neg\varphi \in w$. No, iz $\Diamond\varphi \in w$ slijedi $\neg\Box\neg\varphi \in w$, pa je skup w inkonzistentan što je suprotno pretpostavci.

Promotrimo sada drugi slučaj iz definicije izvoda, tj. kada postoje formule $\psi_1, \ldots, \psi_n \in v^-$ tako da vrijedi $\vdash_K (\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n) \to \neg\varphi$. Primjenom pravila nužnosti i aksioma distributivnosti slijedi da vrijedi $\vdash_K (\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n) \to \Box\neg\varphi$. Iz $\psi_1, \ldots, \psi_n \in v^-$ i definicije skupa v^- slijedi $\Box\psi_1, \ldots, \Box\psi_n \in w$. Iz leme 2.9 slijedi $\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n \in w$. Sada $\vdash_K (\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n) \to \Box\neg\varphi$, $\Box\psi_1 \wedge \ldots \wedge \Box\psi_n \in w$ i lema 2.9 povlače $\Box\neg\varphi \in w$. Budući da je po pretpostavci $\Diamond\varphi \in w$ tada dobivamo da je skup w inkonzistentan, što je nemoguće. Time smo dokazali da je skup formula v^- konzistentan.

Iz Lindenbaumove leme slijedi da postoji maksimalno konzistentan skup $u \in W$ tako da vrijedi $v^- \subseteq u$. Budući da $\varphi \in v^-$ tada $\varphi \in u$. Iz definicije skupa v^- slijedi da za svaku formulu ψ za koju je $\Box\psi \in w$ imamo $\psi \in v^- \subseteq u$. Iz leme 2.12 slijedi wRu. Q.E.D.

Lema 2.14. *(o istinitosti za sistem K)*
Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ kanonski model. Tada za svaki svijet $w \in W$ i svaku formulu φ vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \varphi \in w.$$

Dokaz. Tvrdnju leme dokazujemo indukcijom po složenosti formule φ. Za ilustraciju promatramo samo slučaj u koraku indukcije kada vrijedi $\varphi \equiv \Diamond\psi$. Tada vrijede redom sljedeće ekvivalencije:

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \Diamond\psi \;\Leftrightarrow\; \exists u(wRu \;\&\; \mathfrak{M}, u \Vdash \psi) \;\Leftrightarrow\; \text{(pret. ind.)} \;\; \exists u(wRu \;\&\; \psi \in u)$$

Iz wRu i $\psi \in u$, te definicije relacije dostiživosti u kanonskom modelu, slijedi $\Diamond\psi \in w$.

Obrat slijedi direktno iz leme o egzistenciji. Q.E.D.

Teorem 2.15. *(o potpunosti sistema K)*
Ako je φ valjana formula tada $\vdash_K \varphi$.

Dokaz. Pretpostavimo $\nvdash_K \varphi$. Iz leme 2.7 tada slijedi da je skup $\{\neg\varphi\}$ konzistentan. Iz Lindenbaumove leme slijedi da postoji maksimalno konzistentan skup w tako da vrijedi $\neg\varphi \in w$. Iz leme o istinitosti slijedi $\mathfrak{M}, w \nVdash \varphi$, gdje je $\mathfrak{M}$ kanonski model. Dakle, formula φ nije valjana. Q.E.D.

Napomena 2.16. *Mi smo upravo dokazali da je sistem K slabo potpun. No, za sistem K vrijedi jaka potpunost, tj. za svaki skup formula Γ i svaku formulu φ takvu da vrijedi $\Gamma \Vdash_F \varphi$ imamo $\Gamma \vdash_K \varphi$ (sa F smo označili klasu svih okvira).*

Korolar 2.17. *Najmanja normalna modalna logika K je odlučiva.*

Dokaz. Iz teorema potpunosti za sistem K slijedi da je skup svih teorema sistema K rekurzivno prebrojiv. Tada postoji Turingov stroj T_1 koji redom na svoju traku ispisuje sve teoreme sistema K (stroj se nikada ne zaustavlja te na traku ispisuje samo teoreme).

Iz teorema o svojstvu konačnih modela za osnovnu modalnu logiku slijedi da je za ispitivanje ispunjivosti proizvoljne modalne formule dovoljno provjeriti je li dana formula ispunjiva na nekom konačnom modelu. Neka je T_2 Turingov stroj koji redom generira do na izomorfizam sve konačne modele.

Opišimo sada rad Turingovog stroj T koji ispituje valjanost proizvoljne formule φ. (Problem valjanosti formule ekvivalentan je problemu ispunjivosti formule u smislu da je egzistencija algoritma za rješenje jednog od tih problema ekvivalentna egzistenciji algoritma za rješenje drugog problema.) Stroj T prvo simulira rad stroja T_1 i provjerava je li zadana formula φ jednaka prvom teoremu koji je stroj T_1 generirao. Ako su formule jednake tada stroj T staje u stanju DA (to znači da je formula φ valjana). Ako formule nisu jednake, tada stroj T simulira rad stroja T_2 i generira prvi konačni model te ispituje je li na njemu ispunjiva formula $\neg\varphi$. Ako je formula $\neg\varphi$ ispunjiva na generiranom modelu, tada stroj staje s radom u stanju "NE" (to znači da početna formula φ nije valjana.) Ako pak formula $\neg\varphi$ nije ispunjiva na generiranom modelu, stroj T nastavlja s radom tako da ponovo simulira rad stroja T_1 i generira sljedeći teorem sistema K. Nadamo se da je jasno kako dalje izgleda rad stroja T.

Iz teorema potpunosti i teorema o svojstvu konačnih modela slijedi da će stroj T stati u konačno mnogo koraka za svaku početnu zadanu formulu φ. Očito stroj T radi korektno, tj. ako je početna formula valjana tada stroj završava s radom u stanju "DA", a ako nije valjana tada stroj završava s radom u stanju "NE". Q.E.D.

2.2 Normalne modalne logike

U ovom dijelu razmatramo potpunost nekoliko proširenja sistema K. Pojam normalne modalne logike obično se definira kao skup formula koji ima određena svojstva (sadrži sve tautologije i formulu $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$, zatvoren je na pravila modus ponenes i nužnost te je zatvoren na uniformnu supstituciju). Mi ćemo ovdje normalnom modalnom logikom nazivati svako proširenje sistema K s nekom shemom aksioma.

Ako je Λ neka normalna modalna logika tada s $(W^\Lambda, R^\Lambda, V^\Lambda)$ označavamo pripadni kanonski model. Elementi skupa W^Λ su maksimalno Λ–konzistentni skupovi. Ovdje nećemo posebno isticati definiciju Λ–konzistentnog skupa, te navoditi tvrdnje o svojstvima Λ–konzistentnih skupova. Prilikom razmatranja sistema K mogli smo sve pojmove definirati za općenitu normalnu modalnu logiku Λ. Zatim, sve tvrdnje o (maksimalno) konzistentnim skupovima vrijede za svaku normalnu logiku, a ne samo za sistem K. Dokazi su sasvim analogni dokazima u logici sudova.

Prvo proširenje sistema K koje promatramo je modalna logika $K4$. Nju dobivamo dodavanjem formule $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ kao novog aksioma sistemu K. To kratko označavamo $K4 = K + \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$.

Propozicija 2.18. *Za svaki Kripkeov okvir $\mathcal{F}$ vrijedi:*

$$\mathcal{F} \Vdash \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \quad \textit{ako i samo ako} \quad \textit{okvir } \mathcal{F} \textit{ je tranzitivan.}$$

Dokaz. Neka je formula $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ valjana na okviru $\mathcal{F} = (W, R)$. Lako je videjti da je tada valjana i formula $\Box p \to \Box\Box p$. Pretpostavimo da relacija R nije tranzitivna. Tada postoje svjetovi $w, u, v \in W$ takvi da wRu i uRv te ne vrijedi wRv. Na okviru $\mathcal{F}$ definiramo valuaciju V ovako: $u \in V(p)$ ako i samo ako wRu, za svaku propozicionalnu varijablu p. Tada vrijedi $w \Vdash \Box p$, a onda zbog valjanosti formule $\Box p \to \Box\Box p$ na okviru $\mathcal{F}$ posebno vrijedi $w \Vdash \Box\Box p$. Kako je wRu, imamo $u \Vdash \Box p$, a zbog uRv tada $v \Vdash p$. No, iz definicije valuacije V slijedi da mora biti wRv, što je u kontradikciji s pretpostavkom da ne vrijedi wRv.

Pretpostavimo da je relacija R tranzitivna. Neka je V proizvoljna valuacija na okviru $\mathcal{F}$. Pretpostavimo da za neki svijet $w \in W$ vrijedi $w \in V(\Box p)$, tj. $w \Vdash \Box p$. Tvrdimo da tada vrijedi $w \Vdash \Box\Box p$. Pretpostavimo da je svijet $u \in W$ tako da vrijedi wRu. Tada za svijet

$v \in W$ takav da uRv, zbog tranzitivnosti relacije R vrijedi wRv, a onda zbog $w \Vdash \Box p$, vrijedi $v \Vdash p$. Kako je v bio proizvoljan svijet, tada imamo $u \Vdash \Box p$, a zbog proizvoljnosti svijeta u slijedi $w \Vdash \Box\Box p$. Q.E.D.

Primijetimo da su formule $\Box p \to \Box\Box p$ i $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ logički ekvivalentne.

Teorem 2.19. *Logika $K4$ je adekvatna i potpuna u odnosu na klasu svih tranzitivnih okvira.*

Dokaz. Neka je φ modalna formula za koju vrijedi $\nvdash_{K4} \varphi$. Tada je skup $\{\neg\varphi\}$ jedan $K4$–konzistentan skup. Iz Lindenbaumove leme (za logiku $K4$!) slijedi da postoji maksimalno $K4$–konzistentan skup w tako da vrijedi $\neg\varphi \in w$. Iz leme o istinitosti (za logiku $K4$!) slijedi $(W^{K4}, R^{K4}, V^{K4}), w \nVdash \varphi$.

Dokažimo da je kanonski model (W^{K4}, R^{K4}, V^{K4}) tranzitivan. Neka su $w, u, v \in W^{K4}$ svjetovi takvi da vrijedi $wR^{K4}u$ i $uR^{K4}v$. Neka je φ formula tako da vrijedi $\varphi \in v$. Tada iz $uR^{K4}v$ slijedi $\Diamond\varphi \in u$. Zatim, iz $wR^{K4}u$ slijedi $\Diamond\Diamond\varphi \in w$. Budući da je w maksimalni $K4$–konzistentni skup, te vrijedi $\vdash_{K4} \Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi$, a onda i $\Diamond\Diamond\varphi \to \Diamond\varphi \in w$. Sada ovo posljednje i $\Diamond\Diamond\varphi \in w$ povlače $\Diamond\varphi \in w$. Iz prethodne propozicije slijedi da je kanonski model (W^{K4}, R^{K4}, V^{K4}) jedan model za logiku $K4$. Q.E.D.

Modalni sistem T dobivamo dodavanjem novog aksioma $\Box p \to p$ modalnom sistemu K. To kratko zapisujemo $T = K + \Box p \to p$.

Propozicija 2.20. *Za svaki Kripkeov okvir $\mathcal{F}$ vrijedi:*

$$\mathcal{F} \Vdash \Box p \to p \text{ ako i samo ako okvir } \mathcal{F} \text{ je refleksivan.}$$

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je formula $\Box p \to p$ valjana na okviru $\mathcal{F} = (W, R)$ i neka je $w \in W$. Definiramo valuaciju V ovako: $u \in V(p)$ ako i samo ako wRu, za svaku propozicionalnu varijablu p. Iz definicije valuacije V očito je da $(\mathcal{F}; V), w \Vdash \Box p$. Budući da je formula $\Box p \to p$ valjana, imamo $(\mathcal{F}; V), w \Vdash \Box p \to p$, a onda $(\mathcal{F}; V), w \Vdash p$, pa mora biti wRw. Dakle, relacija R je refleksivna.

Obratno, ako je relacija R refleksivna, tada za proizvoljnu valuaciju V i svijet $w \in W$ imamo da ako $(\mathcal{F}; V), w \Vdash \Box p$, tada zbog wRw mora biti $(\mathcal{F}; V), w \Vdash p$. Odnosno, vrijedi $(\mathcal{F}; V), w \Vdash \Box p \to p$. Dakle, formula $\Box p \to p$ je valjana na okviru $\mathcal{F}$. Q.E.D.

Lako je vidjeti da su formule $\Box p \to p$ i $p \to \Diamond p$ ekvivalentne.

Teorem 2.21. *Logika T je adekvatna i potpuna u odnosu na klasu svih refleksivnih okvira.*

Neka je sa (B) označena formula $p \to \Box\Diamond p$. Označimo sa KB modalni sistem koji je definiran sa $KB = K + (B)$.

Propozicija 2.22. *Za svaki Kripkeov okvir $\mathcal{F}$ vrijedi:*

$$\mathcal{F} \vdash p \to \Box\Diamond p \text{ ako i samo ako okvir } \mathcal{F} \text{ je simetričan.}$$

Teorem 2.23. *Logika KB je adekvatna i potpuna u odnosu na klasu svih simetričnih okvira.*

Promotrimo još jedan modalni sistem koji je definiran sa $KD = K\ +\ \Box p \to \Diamond p$

Propozicija 2.24. *Kažemo da je Kripkeov okvir $\mathfrak{F} = (W, R)$ desno neograničen ako za svaki svijet $w \in W$ postoji svijet v tako da vrijedi wRv. Za svaki Kripkeov okvir $\mathcal{F}$ vrijedi:*

$$\mathcal{F} \vdash \Box p \to \Diamond p \ \ \textit{ako i samo ako} \ \ \textit{okvir} \ \ \mathcal{F} \ \ \textit{je desno neograničen.}$$

Teorem 2.25. *Logika KD je adekvatna i potpuna u odnosu na klasu svih desno neograničenih okvira.*

Sljedeći modalni sistem koji razmatramo je definiran sa $S4 = KT4 = K\ +\ \Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ $+\ \ p \to \Diamond p$.

Teorem 2.26. *Logika $S4$ je adekvatna i potpuna u odnosu na klasu svih refleksivnih i tranzitivnih okvira.*

Sa $K1.1$ je označena normalna modalna logika $K\ +\ \Diamond p \to \Box p$.

Teorem 2.27. *Logika $K1.1$ je adekvatna i potpuna u odnosu na klasu svih okvira (W, R) gdje je R parcijalna funkcija.*

Definiramo $S4.3$= $S4\ +\ \Diamond p \wedge \Diamond q \to \Diamond(p \wedge \Diamond q) \vee \Diamond(p \wedge q) \vee \Diamond(\Diamond p \wedge q)$.

Teorem 2.28. *Logika $S4.3$ je adekvatna i potpuna u odnosu na klasu svih okvira (W, R) gdje je relacija R refleksivna, tranzitivna i nema grananja u desno.*
(Relacija R nema grananja u desno ako vrijedi:

$$\forall x \forall y \forall z (xRy \wedge xRz \to yRz \vee y = z \vee zRy\ )$$

Napomena 2.29. *Za svako od navedenih proširenja može se dokazati da vrijedi svojstvo konačnih modela. To zapravo znači da za svaku formulu φ koja je ispunjiva na nekom od modela nekog proširenja Λ, postoji konačan model za logiku Λ tako da je formula φ ispunjiva na tom konačnom modelu. Štoviše, Bullov teorem (vidi [1]) govori da svaka normalna modalna logika koja proširuje logiku $S4.3$ ima svojstvo konačnih okvira.*

Iz svojstva konačnih modela i potpunosti svakog od navednih proširenja najmanje normalne modalne logike K slijedi da je svako proširenje odlučivo. To se dokazuje sasvim na isti način kao za sistem K (vidi korolar 2.17).

Postoje normalne modalne logike koje nisu potpune u odnosu na Kripkeovu semantiku (vidi [3]). Iz tog razloga razmatraju se i druge semantike. Primjerice, opći okviri te algebarska, okolinska i topološka semantika. Detalje o algebarskoj semantici možete vidjeti u [4].

Zadaci

1. Dokažite teorem adekvatnosti za sistem K.
2. Dokažite da sljedeće formule nisu teoremi sistema K:
   a) $\Diamond\Box(p \wedge \neg q) \rightarrow \Box\Diamond(p \vee q)$
   b) $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Diamond(p \wedge q)$
   c) $\Box(p \vee q) \rightarrow (\Box p \vee \Box q)$
   d) $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$
   e) $p \rightarrow \Box p$.
3. Neka je Γ neki skup formula i φ formula. Dokažite da $\Gamma \vdash_K \varphi$ povlači $\Gamma \Vdash_F \varphi$, gdje je F klasa svih okbira.
4. Dokažite teorem dedukcije za sistem K.
5. Dokažite detaljno lemu o istinitosti za sistem K.
6. Dokažite da su sljedeće formule teoremi sistema K:
   a) $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$
   b) $\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Diamond p \vee \Box q)$
   c) $\Box(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\Box p \leftrightarrow \Box q)$
   d) $\Box(p \wedge q) \rightarrow \Box p$
   e) $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Box(p \vee q)$.
7. Dokažite propoziciju 2.24.
8. Dokažite teorem adekvatnosti za svako od uvedenih proširenja sistema K.
9. Dokažite teorem dedukcije za sistem K te za svako od uvedenih proširenja.
10. Dokažite svojstva konzistentnih skupova za sistem K (vidi lemu 2.7) te za svako od uvedenih proširenja.
11. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ Kripkeov model i $w \in W$ proizvoljan svijet. Dokažite da je tada skup $\{\varphi : \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi\}$ maksimalno konzistentan.
12. Dokažite svojstva maksimalno konzistentnih skupova za sistem K (vidi lemu 2.9) te za svako od uvedenih proširenja.
13. Dokažite Lindenbaumovu lemu za sistem K te za svako od uvedenih proširenja sistema K.
14. Dokažite lemu o egzistenciji za svako od uvedenih proširenja sistema K.

15. Dokažite lemu o istinitosti za svako od uvedenih proširenja sistema K.

16. Dokažite teorem potpunosti za svako od uvedenih proširenja sistema K.

17. Neka je $S5 = KT4B = K \ + \ \Diamond\Diamond p \to \Diamond p \ + \ p \to \Diamond p \ + \ p \to \Box\Diamond p$. Odredite klasu okvira za koju je normalna modalna logika $S5$ adekvatna i potpuna.

18. Neka su φ i ψ proizvoljne modalne formule. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

    a) $K4 \vdash (\varphi \wedge \Box\varphi) \to \psi$

    b) $K4 \vdash \Box\, \varphi \to \Box\, \psi$.

19. Neka je Λ proizvoljna normalna modalna logika, tj. skup modalnih formula koji sadrži sve tautologije, sve instance sheme akisoma $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q,)$ te je zatvoren za uniformnu supstituciju i na pravila izvoda modus ponens i nužnosti. Označimo redom:

$$W^\Lambda \ := \ \{u \ : \ u \ \text{ je maksimalan } \ \Lambda - \text{konzistentan skup formula}\}$$

$$R^\Lambda \subseteq W^\Lambda \times W^\Lambda, \ \text{ koja je definirana sa:}$$
$$wR^\Lambda u \ \Leftrightarrow \ \text{ za svaku formulu } \ \varphi \ \text{ vrijedi da } \ \varphi \in u \ \text{ povlači } \ \Diamond\varphi \in w$$

$$\widehat{\varphi} := \{u \in W^\Lambda \ : \ \varphi \in u\}, \ \text{ za svaku formulu } \ \varphi$$

$$A^\Lambda := \{\widehat{\varphi} \ : \ \varphi \ \text{ je formula }\}$$

Lako je provjeriti da je $\mathfrak{f}^c_\Lambda = (W^\Lambda, R^\Lambda, A^\Lambda)$ opći okvir[1]. Naziva se kanonski opći okvir. Dokažite da vrijedi $\mathfrak{f}^c_\Lambda \Vdash \Lambda$. Zatim, dokažite da je svaka normalna modalna logika jako potpuna u odnosu na svoj kanonski opći okvir. (Definicija jake potpunosti je u napomeni 2.16.)

[1]Definiciju općeg okvira možete vidjeti u [1] i [4]

Poglavlje 3

Teorija korespondencije

Sada ćemo iskazati jedan od najvažnijih rezultata u vezi bisimulacija. To je van Benthemov teorem karakterizacije koji govori da modalnu logiku možemo promatrati kao fragment logike prvog reda koji je invarijantan na bisimulacije. U prvom dijelu ovog poglavlja prvo definiramo preslikavanja koja svakoj modalnoj formuli pridružuje neku formulu logike prvog reda. Nakon toga iskazujemo van Benthemov teorem te komentiramo njegov dokaz.

3.1 Standardna translacija

Modalna logika se može promatrati kao fragment logike prvog reda. Neka je σ_m signatura koja (uz jednakost) sadrži jedan dvomjesni relacijski simbol R (koristimo istu oznaku kao za relaciju dostiživosti, no uvijek će biti jasno iz konteksta o čemu se radi) i po jedan jednomjesni relacijski simbol P za svaku propozicionalnu varijablu p. Možemo kratko zapisati $\sigma_m = \{=, R\} \cup \{P_i : p_i \in Prop\}$.

Definicija 3.1. *Neka je x proizvoljna individualna varijabla.* **Standardna translacija** *je funkcija ST_x koja svaku modalnu formulu φ preslikava u σ_m-formulu $ST_x(\varphi)$ s jednom slobodnom varijablom x, a definiramo je rekurzivno:*

a) $ST_x(p) = P(x)$, *za svaku propozicionalnu varijablu p*

b) $ST_x(\bot)$ *je formula* $x \neq x$

c) $ST_x(\neg\varphi) = \neg ST_x(\varphi)$

d) $ST_x(\varphi_1 \vee \varphi_2) = ST_x(\varphi_1) \vee ST_x(\varphi_2)$

e) $ST_x(\Diamond\varphi) = \exists y(R(x,y) \wedge ST_y(\varphi))$, *gdje je y nova varijabla.*

Iz definicije funkcije ST_x lako slijedi da je $ST_x(\Box\varphi)$ jednako $\forall y(R(x,y) \to ST_y(\varphi))$. Unastavku ćemo umjesto zapisa atomarne formule Rxy pisati xRy, a umjesto zapisa atomarne formule $P(x)$ pisati ćemo Px.

Primjer 3.2. *a)* $ST_x(\Diamond\top)$
$= \exists y(xRy \wedge ST_y(\top))$
$= \exists y(xRy \wedge y = y)$
$\equiv \exists y(xRy)$

b) $ST_x(\Box p \to p)$
$= ST_x(\Box p) \to ST_x(p)$
$\equiv \forall y(xRy \to ST_y(p)) \to Px$
$\equiv \forall y(xRy \to Py) \to Px$

c) $ST_x(\Box(\Box p \to p) \to \Box p)$
$= ST_x(\Box(\Box p \to p)) \to ST_x(\Box p)$
$\equiv \forall y(xRy \to ST_y(\Box p \to p)) \to \forall y(xRy \to ST_y(p))$
$\equiv \forall y(xRy \to (ST_y(\Box p) \to ST_y(p))) \to \forall y(xRy \to Py)$
$\equiv \forall y(xRy \to (\forall z(yRz \to ST_z(p)) \to Py)) \to \forall y(xRy \to Py)$
$\equiv \forall y(xRy \to (\forall z(yRz \to Pz) \to Py)) \to \forall y(xRy \to Py)$

Napomena 3.3. *Standardnu translaciju je moguće definirati tako da se koriste najviše dvije varijable. Primijetimo da je tada standardna translacija svake modalne formule element fragmenta logike prvog reda s dvije varijable (tj. FO^2). Sada opisujemo kako to napraviti. Neka su x i y dvije različite varijable. Definiramo preslikavanja st_x i st_y ovako:*

$$
\begin{array}{rl}
st_x(p) = P(x) & st_y(p) = P(y), \quad \textit{za svaku varijablu } p \\
st_x(\bot) \ = \ x \neq x & st_y(\bot) \ = \ y \neq y \\
st_x(\neg\varphi) = \neg st_x(\varphi) & st_y(\neg\varphi) = \neg st_y(\varphi) \\
st_x(\varphi_1 \vee \varphi_2) = st_x(\varphi_1) \vee st_x(\varphi_2) & st_y(\varphi_1 \vee \varphi_2) = st_y(\varphi_1) \vee st_y(\varphi_2) \\
st_x(\Diamond\varphi) = \exists y(R(x,y) \wedge st_y(\varphi)) & st_y(\Diamond\varphi) = \exists x(R(y,x) \wedge st_x(\varphi))
\end{array}
$$

Primijetimo da u definicijama $st_x(\Diamond\varphi)$ i $st_y(\Diamond\varphi)$ nema uvjeta da se mora koristiti nova varijabla. Očito za svaku modalnu formulu φ formula $st_x(\varphi)$ sadrži najviše dvije varijable te su formule $st_x(\varphi)$ i $ST_x(\varphi)$ logički ekvivalentne.

Iz Churchovog teorema znamo da je logika prvog reda neodlučiva. No, fragment logike prvog reda koji sadrži sve formule s najviše dvije varijable (tj. FO^2), je odlučiv. Primjenom standardne translacije slijedi da je osnovna modalna logika odlučiva. No, mi ćemo definirati modalne logike čiji modeli imaju posebna svojstva. Tada primjenom standardne translacije ne možemo dobiti konačni model sa zadanim svojstvima. Iz tog razloga moramo razmatrati posebne metode za dokaze odlučivosti modalnih logika.

Svaki model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ možemo promatrati kao σ_m-strukturu logike prvog reda, pri čemu $|\mathfrak{M}| = W$, $R^{\mathfrak{M}} = R$ i $P^{\mathfrak{M}} = V(p)$ za svaku propozicionalnu varijablu p. Budući je standardna translacija zapravo formalni zapis definicije istinitosti modalne formule, lako se dokazuje sljedeća propozicija.

Propozicija 3.4. *Neka je φ modalna formula i $\mathfrak{M}$ model. Tada vrijedi:*

a) za svaki svijet $w \in W$ imamo: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models ST_x(\varphi)[w]$

b) $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models \forall x ST_x(\varphi)$.

Koristeći prethodnu propoziciju možemo važna svojstva logike prvog reda "prenijeti" u modalnu logiku i obratno. Neke od tih "prijenosa" ističemo u sljedećem primjeru.

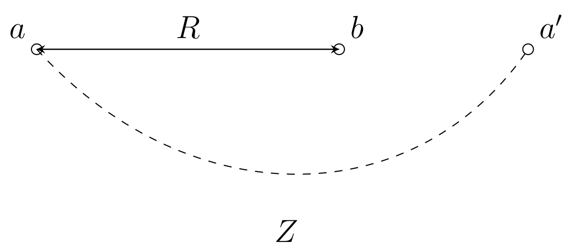
Primjer 3.5. *Modalna logika je kompaktna, tj. ako je Σ skup modalnih formula čiji je svaki konačan podskup ispunjiv, onda je i skup formula Σ ispunjiv. To je posljedica kompaktnosti logike prvog reda i prethodne propozicije. Naime, konačna ispunjivost skupa Σ povlači konačnu ispunjivost skupa $\{ST_x(\varphi) : \varphi \in \Sigma\}$, koji je stoga zbog kompaktnosti logike prvog reda ispunjiv. No, onda opet prethodna propozicija povlači da je skup formnula Σ ispunjiv.*

Slično se pokazuje da za modalnu logiku vrijedi analogon Löwenheim–Skolemovog teorema "na dolje", tj. ako skup formula ima model onda ima i prebrojiv model.

3.2 Van Benthemov teorem karakterizacije

Standardna translacija očito nije surjekcija. Štoviše, nije svaka formula logike prvog reda ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule. Naime, takve formule su nužno invarijantne na bisimulacije, što ne vrijedi za sve formule logike prvog reda.

Primjer 3.6. *Formula $F(x) = \exists y R(y, x)$ nije invarijantna na bisimulacije. Naime, neka je $\mathfrak{M} = (\{a, b\}, \{(b, a)\}, V)$ i $\mathfrak{M}' = (\{a'\}, \emptyset, V')$, pri čemu je $V(p) = V'(p) = \emptyset$ za svaku propozicionalnu varijablu p. Tada je $Z = \{(a, a')\}$ bisimulacija. Lako je provjeriti da vrijedi $\mathfrak{M} \models F(x)[a]$ i $\mathfrak{M}' \not\models F(x)[a']$. Na sljedećoj slici je ilustracija ovog primjera.*



Sada navodimo osnovni teorem modalne teorije korespondencije. Dokaz možete pogledati u

Teorem 3.7 (van Benthem)**.** *Neka je $F(x)$ neka σ_m-formula. Tada je formula $F(x)$ ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule ako i samo ako je formula $F(x)$ invarijantna za bisimulacije.*

Detaljan dokaz prethodnog teorema možete vidjeti u [1]. Mi ćemo ovdje navesti samo skicu dokaza. Ako za neku σ_m-formulu $F(x)$ postoji modalna formula φ takva da vrijedi $F(x) \Leftrightarrow ST_x(\varphi)$, tada nije teško dokazati da je formula $F(x)$ invarijatna za bisimulacije. Dokaz za to ćemo sada napisati. Pretpostavimo da za neku σ_m-formulu $F(x)$ postoji modalna formula φ tako da vrijedi $F(x) \Leftrightarrow ST_x(\varphi)$. Neka su $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{N}, v)$ točkovni Kripkeovi modeli takvi da vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{N}, v$ i $\mathfrak{M} \models F(x)[w]$. Iz $\mathfrak{M} \models F(x)[w]$ i $F(x) \Leftrightarrow ST_x(\varphi)$ slijedi $\mathfrak{M} \models ST_x(\varphi)[w]$. Iz propozicije o osnovnom svojstvu standardne translacije tada imamo $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Iz propozicije o čuvanju istine pri bisimulacijama slijedi $\mathfrak{N}, v \Vdash \varphi$. Ponovnom primjenom propozicije o osnovnom svojstvu standardne translacije slijedi $\mathfrak{N} \models ST_x(\varphi)[v]$, a onda iz $F(x) \Leftrightarrow ST_x(\varphi)$ konačno slijedi $\mathfrak{N} \models F(x)[v]$.

Dokaz obrata je daleko zahtjevniji (koriste se pojmovi i alati teorije modela logike prvog reda kao što su, primjerice, ultrafiltri, ultraprodukti i saturirani modeli.) Ovdje ćemo navesti skicu dokaza.

Pretpostavimo da je neka σ_m-formula $F(x)$ invarijantna za bisimulacije. Definiramo

$$M(F) = \{ST_x(\psi) : \psi \text{ je modalna formula i } F(x) \models ST_x(\psi)\}.$$

Tvrdnja 1. Ako $M(F) \models F(x)$ tada postoji modalna formula φ tako da vrijedi $F(x) \Leftrightarrow ST_x(\varphi)$.
Dokažimo ovu tvrdnju. Iz teorema kompaktnosti slijedi da postoji konačno mnogo modalnih formula $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ tako da vrijedi $\{ST_x(\varphi_1), \ldots, ST_x(\varphi_n)\} \models F(x)$. Iz svojstva standardne translacije tada slijedi $ST_x(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \models F(x)$. Iz definicije skupa $M(F)$ slijedi $F(x) \models ST_x(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$. Time smo dokazali da vrijedi $F(x) \Leftrightarrow ST_x(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)$.

Tvrdnja 2. Vrijedi $M(F) \models F(x)$.
Skica dokaza. Neka je $\mathfrak{M}$ model i $w \in \mathfrak{M}$ takvi da $\mathfrak{M} \models M(F)[w]$ (želimo dokazati $\mathfrak{M} \models F(x)[w]$). Definiramo

$$T = \{ST_x(\varphi) : \varphi \text{ je modalna formula takva da } \mathfrak{M} \models ST_x(\varphi)[w]\}.$$

Primjenom teorema kompaktnosti lako se dobije da je skup formula $T \cup \{F(x)\}$ konzistentan. Tada postoji točkovni model $(\mathfrak{N}, v)$ takav da $\mathfrak{N} \models (T \cup \{F(x)\})[v]$. Lako je vidjeti da vrijedi $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{N}, v$. No, iz $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{N}, v$ ne možemo zaključiti $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{N}, v$ (onda bi primjenom pretpostavke o invarijantnosti formule $F(x)$ na bisimulacije mogli zaključiti $\mathfrak{M} \models F(x)[w]$.) Tu nam pomaže lema o zaobilaženju koju ćemo izreći kasnije kada definiramo ultrafiltre, ultraprodukte, ultrafilterska proširenja modela i prebrojivo saturirane strukture. Na sljedećoj slici ilustriramo ideju leme o zaobilaženju.

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}, w \arrow[d, dash, dashed] & \equiv & \mathfrak{N}, v \arrow[d, dash, dashed] \\
\mathfrak{M}^*, w^* & \underline{\leftrightarrow} & \mathfrak{N}^*, v^*
\end{tikzcd}$$

Iz leme o zaobilaženju slijediti će egzistencija točkovnih modela $(\mathfrak{M}^*, w^*)$ i $(\mathfrak{N}^*, v^*)$ koji će biti bisimulirani, te će se čuvati istinitost σ_m-formula između modela $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}^*$, odnosno između modela $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{N}^*$.

Zadaci

1. Odredite standardnu translaciju formule $\Diamond(\Diamond p \to p) \to \Diamond p$.

2. Dokažite propoziciju 3.4.

3. Dokažite da za modalnu logiku vrijedi Löwenheim–Skolemov teorem "na dolje", tj. da za svaki skup modalnih formula Γ za koji postoji model, nužno postoji i prebrojiv model.

4. Neka je $F \equiv \forall x \forall y(xRy \vee x = y \vee yRx)$. Odredite postoji li modalna formula φ tako da vrijedi $F \Leftrightarrow ST_x(\varphi)$.

Poglavlje 4

Ultrafiltri, ultraprodukti i ultrafilterska proširenja

Radi definicije još jedne konstrukcije modela, ultrafilterskog proširenja, potreban nam je pojam ultrafiltra. Zatim, za dokaz van Benthemovog teorema karakterizacije nužni su pojmovi i rezultati o ultraproduktima. No, prvo ćemo dati jednu drugu motivaciju za uvođenje pojmova ultrafitra i ultraprodukta.

Primjer 4.1. *Kartezijev produkt familije grupa je grupa.*
Skicirajmo dokaz te tvrdnje. Neka je $\{(G_i, \circ_i) : i \in I\}$ *familija grupa. Označimo:*

$$G = \prod_{i \in I} G_i = \{f \mid f : I \to \cup_{i \in I} G_i, \quad \text{za svaki} \;\; i \in I \;\; \text{vrijedi} \; f(i) \in G_i\}$$

Zatim, neka je $\circ$ *binarna operacija na* G *definirana sa* $(f \circ g)(i) = f(i) \circ_i g(i)$. *Lako je provjeriti da je za sve* $f, g \in G$ *funkcija* $f \circ g$ *ponovno element od* G *te da je* $(G, \circ)$ *grupa. To znači da je Kartezijev produkt proizvoljne familije grupa ponovno grupa.*

Primjer 4.2. *Kartezijev produkt polja općenito nije polje.*
Kako bi dokazali tu tvrdnju definirajmo prvo Kartezijev produkt polja. Neka je $I \neq \emptyset$, *te za svaki* $i \in I$ *neka je* $F_i = (A_i, +_i, \cdot_i, 0_i, 1_i)$ *polje. Označimo* $A = \prod_{i \in I} A_i$. *Redom definiramo:*

a) funkciju $0 : I \to \cup A_i$ *sa* $0(i) = 0_i$

b) funkciju $1 : I \to \cup A_i$ *sa* $1(i) = 1_i$

c) funkcije $+$ *i* $\cdot$ *sa:*

$$(f + g) : I \to \cup_{i \in I} A_i, \quad (f + g)(i) = f(i) +_i g(i)$$

$$(f \cdot g) : I \to \cup_{i \in I}, \quad (f \cdot g)(i) = f(i) \cdot_i g(i).$$

Uz tako definirane operacije Kartezijev produkt polja općenito nije polje. Primjerice, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *nije polje, jer uređeni parovi* $(0, 1)$ *i* $(1, 0)$ *različiti su od nule, ali* $(0, 1) \cdot (1, 0) = 0$.

Na sasvim analogni način može se pokazati da Kartezijev produkt linearno uređenih skupova općenito nije linearno uređen. Kako riješiti istaknute probleme? Ideja je jednostavna. Na Kartezijevom produktu $\prod_{i\in I} A_i$ definiramo posebnu relaciju ekvivalencije, te promatramo pripadni kvocijenti skup.

Prvo definiramo pojam ultrafiltra. (Prilikom dokaza Łosovog teorema opravda se svaki uvjet iz definicije ultrafiltra.)

Definicija 4.3. *Neka je $I \neq \emptyset$.* **Ultrafilter** *nad skupom I je familija $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ takva da vrijedi:*

(1) $I \in F$

(2) familija F je zatvorena na konačne presjeke, tj. ako su $A \in F$ i $B \in F$, onda je i $A \cap B \in F$

(3) familija F je zatvorena na nadskupe, tj. ako je $A \in F$ i $A \subseteq B \subseteq I$, onda je i $B \in F$

(4) $F \neq \mathcal{P}(I)$

(5) za svaki $A \subseteq I$ vrijedi: $A \in F$ ako i samo ako $I \setminus A \notin F$.

Kažemo da je ultrafilter **prebrojivo nepotpun** *ako nije zatvoren na prebrojive presjeke.*

Familija F za koju vrijede uvjeti (1)–(3) naziva se **filter***, a ako vrijedi i (4) tada familiju F nazivamo* **pravi filter***.*

Primijetimo da uvjet (4) zbog zatvorenosti na nadskupe možemo zamijeniti uvjetom $\emptyset \notin I$. Nadalje, za svaki $x \in I$ familija svih podskupova skupa I koji sadrže x je očito ultrafilter, koji se zove **glavni filter** i označava sa Π_x. Nije teško dokazati da ultrafilter nad beskonačnim skupom I nije glavni ako i samo ako sadrži samo beskonačne skupove, a to je ekvivalentno sa činjenicom da sadrži sve kofinitne podskupove skupa I. Odavde lako slijedi da je ultrafilter nad prebrojivim skupom, ako nije glavni filter, prebrojivo nepotpun. Ultrafilter koji nije glavni teško je konstruirati, ali sljedeća propozicija daje jednostavan dovoljan uvjet njegove egzistencije.

Propozicija 4.4. *Neka je I neprazan skup i E familija njegovih podskupova koja ima svojstvo konačnih presjeka (tj. presjek svake njene konačne potfamilije je neprazan). Tada postoji ultrafilter nad skupom I koji sadrži E.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ familija svih pravih filtera nad skupom I koji sadrže E. Uočimo da je $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Naime, lako se vidi da je presjek svih filtera nad skupom I koji sadrže E pravi filter. Familija $\mathcal{F}$ je parcijalno uređena inkluzijom. Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljan lanac u $\mathcal{F}$. Lako je provjeriti da je unija svih članova lanca $\mathcal{L}$ također pravi filter koji sadrži E. Dakle, svaki lanac u $\mathcal{F}$ ima gornju među. Prema Zornovoj lemi, postoji maksimalni element $F \in \mathcal{F}$. Lako se vidi da je F traženi ultrafilter. Q.E.D.

Sve detalje o filtrima i ultrafiltrima možete vidjeti u nastavnom materijalu [6]. Koristeći pojam ultrafiltra sada ćemo definirati pojam ultraprodukta. Prvo ćemo definirati pojam ultraprodukta familije skupova, a nakon toga pojam ultraprodukta familije proizvoljnih struktura iste signature.

Definicija 4.5. *Neka je* $\{M_i : i \in I\}$ *proizvoljna familija skupova te neka je* U *proizvoljan ultrafilter nad skupom indeksa* I. *Na Kartezijevom produktu familije skupova* $\{M_i : i \in I\}$, *tj. na skupu*

$$\prod_{i \in I} M_i = \{f \mid f : I \to \cup_{i \in I} M_i \ \ \text{tako da je za svaki} \ \ i \in I \ \text{ispunjeno} \ \ f(i) \in M_i\},$$

definiramo binarnu relaciju $\sim$ *ovako:*

$$f \sim g \quad \text{ako i samo ako} \quad \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in U.$$

Lako je pokazati da je relacija $\sim$ *jedna relacija ekvivalencije. Za* $f \in \prod_{i \in I} M_i$ *sa* f^U *označavamo pripadnu klasu ekvivalencije.*

Skup svih klasa ekvivalencije nazivamo **ultraprodukt familije skupova** $\{M_i : i \in I\}$ *te ga označavamo sa* $\prod\limits_U M_i$.

Definicija 4.6. *Neka je* σ *proizvoljna signatura te neka je* $\{\mathfrak{M}_i = (M_i, \varphi_i) : i \in I\}$ *neka familija* σ*-struktura. Neka je* U *proizvoljan ultrafilter nad skupom* I. *Definiramo* σ*-strukturu* $\mathfrak{M} = (M, \varphi)$ *na sljedeći način:*

a) $M = \prod\limits_U M_i$

b) za relacijski simbol $R^n \in \sigma$ *definiramo:*
$((f_1)^U, \ldots, (f_n)^U) \in \varphi(R)$ *ako i samo ako*
$\{i : (f_1(i), \ldots, f_n(i)) \in \varphi_i(R)\} \in U$

c) za funkcijski simbol $f^n \in \sigma$ *definiramo:*

$$\varphi(f^n)((f_1)^U, \ldots, (f_n)^U) = \Big(\ i \mapsto \varphi_i(f^n)(f_1(i), \ldots, f_n(i)) \ \Big)^U$$

d) za konstantski simbol $c \in \sigma$ *definiramo* $\varphi(c) = \Big(i \mapsto \varphi_i(c)\Big)^U$.

Upravo definirana struktura se naziva **ultraprodukt familije struktura** $\{\mathfrak{M} : i \in I\}$ *i označavamo je sa* $\prod\limits_U \mathfrak{M}_i$.

Ako su sve strukture $\mathfrak{M}_i$ *međusobno jednake, tj.* $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{N}$, *za svaki* $i \in I$, *tada pripadni ultraprodukt nazivamo* **ultrapotencija** *strukture* $\mathfrak{N}$.

Teorem 4.7 (Łosov osnovni teorem o ultraproduktima)**.**
Neka je $I \neq \emptyset$, $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ proizvoljna familija σ-struktura i U proizvoljan ultrafilter nad skupom I. Tada za svaku zatvorenu formulu F vrijedi:

$$\prod_U \mathfrak{M}_i \models F \quad \text{ako i samo ako} \quad \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models F\} \in U.$$

Teorem se dokazuje indukcijom po složenosti formule. Detaljan dokaz možete vidjeti u [6].

Iz Łosovog teorema slijedi da je ultraprodukt proizvoljne familije polja ponovno polje (nad proizvoljnim ultrafiltrom). Zatim, iz Łosovog teorema jednostavno slijedi da je ultraprodukt familije linearno uređenih skupova ponovo linearno uređen skup.

Bili smo istaknuli da svaki Kripkeov model možemo shvatiti kao σ_m-strukturu. Iz toga slijedi da imamo definirane i pojmove ultraproduka i ultrapotencija za Kripkeove modele.

4.1 Modalna saturacija

Vidjeli smo da postojanje bisimulacije između dva točkovna modela povlači njihovu modalnu ekvivalenciju. Zatim, naveli smo primjer koji pokazuje da obrat općenito ne vrijedi. Sada definiramo posebne vrste klase točkovnih modela, tzv. Hennessy-Milnerove klase, kod kojih vrijedi obrat. Nakon toga definiramo tzv. modalno saturirane modele te dokazujemo da je svaka klasa modalno saturiranih modela nužno Hennessy-Milnerova klasa.

Definicija 4.8. *Za klasu modela $\mathcal{K}$ kažemo da ima Hennessy-Milnerovo svojstvo ili da je Hennessy–Milnerova klasa ako za sve modele $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}' \in \mathcal{K}$ i za sve svjetove $w \in \mathfrak{M}$ i $w' \in \mathfrak{M}'$ takve da $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{M}', w'$.*

Definicija 4.9. *Za model $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ kažemo da je modalno saturiran ili m–saturiran ako za svaki svijet $w \in W$ i svaki skup formula Σ koji je konačno ispunjiv u skupu $R[w] = \{v \in W : wRv\}$, imamo da je skup formula Σ ispunjiv u $R[w]$.*

Propozicija 4.10. *Svaka klasa m–saturiranih modela ima Hennessy–Milnerovo svojstvo.*

Dokaz. Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{M}' = (W', R', V')$ m–saturirani modeli. Za svjetove $w \in W$ i $w' \in W'$ stavimo wZw' ako su w i w' modalno ekvivalentni. Treba dokazati da je Z bisimulacija. Uvjet (at) je trivijalno zadovoljen.

Dokažimo da vrijedi uvjet (forth). Neka su svjetovi $w \in W$ i $w' \in W'$ modalno ekvivalentni i neka vrijedi wRv. Treba dokazati da postoji svijet $v' \in W'$ modalno ekvivalentan sa svijetom v takav da je $w'R'v'$. Neka je Σ skup svih formula istinitih u svijetu v. Lako se vidi da je tada skup formula Σ konačno ispunjiv u $R'[w']$ (naime, na konačan skup formula može se primijeniti konjunkcija, a na tako dobivenu formulu operator $\Diamond$). Zbog m–saturiranosti skup formula Σ je ispunjiv u $R'[w']$, tj. postoji svijet v' takav da je $w'R'v'$

i sve formule istinite na svijetu v su istinite i na svijetu v'. Lako je provjeriti (primjenom već dokazanog na negaciju formule) da vrijedi i obrat, dakle svjetovi v i v' su modalno ekvivalentni.

Slično se dokaže i uvjet (back). Q.E.D.

Dakle, među modalno ekvivalentnim svjetovima m–saturiranih modela postoji bisimulacija.

4.2 Ultrafilterska proširenja

U ovom dijelu definirati ćemo četvrtu osnovnu konstrukciju modela. To su ultrafilterska proširenja modela koja ćemo koristiti za dokaz van Benthemovog teorema te kasnije prilikom razmatranja definabilnosti.

Definicija 4.11. *Neka je $\mathfrak{F} = (W, R)$ Kripkeov okvir. Definiramo funkcije $m_\Diamond, m_\Box : \mathcal{P}(W) \to \mathcal{P}(W)$ ovako:*

$$m_\Diamond(X) = \{w \in W : \textit{ postoji svijet } \ u \in X \ \ \textit{takav da } \ wRu\}$$

$$m_\Box(X) = \{w \in W : \textit{ za svaki svijet } \ u \in X \ \ \textit{takav da } \ wRu \ \ \textit{vrijedi } u \in X\}.$$

U sljedećoj propoziciji navodimo osnovna svojstva funkcija $m_\Diamond$ i $m_\Box$. Upravo iz tih svojstva biti će jasna definicija tih funkcija.

Propozicija 4.12. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model. Tada za svaku formulu φ vrijedi redom sljedeće:*

$$V(\neg\varphi) = W \setminus V(\varphi) \qquad V(\varphi \wedge \psi) = V(\varphi) \cap V(\psi)$$

$$V(\varphi \vee \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$$

$$V(\Diamond\varphi) = m_\Diamond(V(\varphi)) \qquad V(\Box\varphi) = m_\Box(V(\varphi))$$

$$m_\Box(X) = W \setminus m_\Diamond(W \setminus X) \qquad m_\Box(X \cap Y) = m_\Box(X) \cap m_\Box(Y).$$

Definicija 4.13. Ultrafiltersko proširenje *modela $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ je model $\mathfrak{ue}\mathfrak{M} = (Uf(W), R^{\mathfrak{ue}}, V^{\mathfrak{ue}})$, gdje je:*

a) $Uf(W)$ skup svih ultrafiltera nad W

b) $uR^{\mathfrak{ue}}v$ ako i samo ako za svaki $X \in v$ vrijedi $m_\Diamond(X) \in u$

c) $V^{\mathfrak{ue}}(p)$ skup svih ultrafiltera u takvih da je $V(p) \in u$, za svaku varijablu p.

U sljedećoj lemi navodimo karakterizaciju relacije $R^{\mathfrak{ue}}$ pomoću funkcije $m_\Box$. Tu karkaterizaciju ćemo koristiti u dokazima nekih trvrdnji koje slijede.

Lema 4.14. *Neka je (W, R, V) model. Tada za sve ultrafiltre $u, v \in Uf(W)$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$uR^{\mathfrak{ue}}v \ \text{ ako i samo ako } \ \{X \subseteq W : m_\Box(X) \in u\} \subseteq v$$

Propozicija 4.15. *Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model. Tada za svaki ultrafilter u nad skupom W i svaku modalnu formulu φ vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \varphi \ \text{ ako i samo ako } \ V(\varphi) \in u.$$

To možemo zapisati i ovako:

$$u \in V^{\mathfrak{ue}}(\varphi) \ \text{ ako i samo ako } \ V(\varphi) \in u.$$

Posebno, svaki svijet $w \in W$ je modalno ekvivalentan glavnom ultrafiltru Π_w, tj. vrijedi:

$$\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \Pi_w.$$

Dokaz. Prvu tvrdnju dokazujemo indukcijom po složenosti formule. Bazu indukcije osigurava definicija valuacije $V^{\mathfrak{ue}}$. Korak u slučaju logičkih veznika jednostavna je posljedica definicijskih svojstava ultrafiltera. Dokažimo tvrdnju za formulu oblika $\Diamond\varphi$. Pretpostavimo $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$. Tada postoji svijet v takav da vrijedi $uR^{\mathfrak{ue}}v$ i $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $V(\varphi) \in v$. Iz definicije relacije $R^{\mathfrak{ue}}$ slijedi $m_\Diamond(V(\varphi)) \in u$. Kako je $m_\Diamond(V(\varphi)) = V(\Diamond\varphi)$ (vidi propoziciju 4.12), imamo $V(\Diamond\varphi) \in u$, što je i trebalo dokazati.

Dokažimo sada obratnu implikaciju. Neka je φ proizvoljna formula za koju vrijedi $V(\Diamond\varphi) \in u$. Dovoljno je dokazati da skup $E = \{V(\varphi)\} \cup \{A \subseteq W : m_\Box(A) \in u\}$ ima svojstvo konačnih presjeka. Naime, iz propozicije 4.4 tada slijedi da se skup E može proširiti do nekog ultrafiltra v, pa vrijedi $V(\varphi) \in v$ i stoga prema pretpostavci indukcije imamo $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, v \Vdash \varphi$. S druge strane, $\{A : m_\Box(A) \in u\} \subseteq v$ povlači $uR^{\mathfrak{ue}}v$ (vidi lemu 4.14), pa vrijedi $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, u \Vdash \Diamond\varphi$. Dokažimo, dakle, da skup E ima svojstvo konačnih presjeka. Lako se provjeri da je skup $\{A : m_\Box(A) \in u\}$ zatvoren na konačne presjeke (tu se koristi tvrdnja $m_\Box(X \cap Y) = m_\Box(X) \cap m_\Box(Y)$ iz propozicije 4.12). Stoga preostaje dokazati da vrijedi $V(\varphi) \cap A \neq \emptyset$ za svaki skup A takav da je $m_\Box(A) \in u$. Po pretpostavci je i $V(\Diamond\varphi) \in u$, pa je $V(\Diamond\varphi) \cap m_\Box(A) \neq \emptyset$. Neka je w_0 neki svijet iz tog presjeka. Zbog $w_0 \in V(\Diamond\varphi)$ slijedi da postoji svijet w_1 takav da je w_0Rw_1 i $w_1 \in V(\varphi)$. S druge strane, kako je $w_0 \in m_\Box(A)$, to je $w_1 \in A$, pa je $w_1 \in V(\varphi) \cap A$, dakle taj presjek je zaista neprazan.

Iz upravo dokazane prve tvrdnje odmah slijedi da je $\mathfrak{ue}\mathfrak{M}, \Pi_w \Vdash \varphi$ ekvivalentno sa $V(\varphi) \in \Pi_w$, tj. $w \in V(\varphi)$, a onda $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$. Q.E.D.

Propozicija 4.16. *Ultrafiltersko proširenje svakog modela je m–saturirani model.*

Dokaz. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ model, u ultrafilter nad W i Σ skup formula konačno ispunjiv na skupu svih $R^{\mathfrak{ue}}$–sljedbenika ultrafiltra u.

Neka je sa Σ' označen skup svih konačnih konjunkcija formula iz skupa Σ. Dokažimo da skup $E = \{V(\varphi) : \varphi \in \Sigma'\} \cup \{A \subseteq W : m_\Box(A) \in u\}$ ima svojstvo konačnih presjeka. Kako su skupovi $\{V(\varphi) : \varphi \in \Sigma'\}$ i $\{A : m_\Box(A) \in u\}$ zatvoreni na konačne presjeke, preostaje dokazati da za svaku formulu $\varphi \in \Sigma'$ i svaki $A \subseteq W$ takav da je $m_\Box(A) \in u$, vrijedi $V(\varphi) \cap A \neq \emptyset$. No, kako je $\varphi \in \Sigma'$, tada postoji ultrafilter v_φ takav da je $uR^{\mathfrak{ue}}v_\varphi$ i $\mathfrak{ueM}, v_\varphi \Vdash \varphi$, tj. $V(\varphi) \in v_\varphi$. S druge strane, zbog $m_\Box(A) \in u$ je $A \in v_\varphi$. Slijedi da je presjek $V(\varphi) \cap A \in v_\varphi$, pa je po definiciji ultrafiltra neprazan.

Iz propozicije 4.4 slijedi da postoji ultrafilter v nad skupom W koji je nadskup skupa E. Pritom je $uR^{\mathfrak{ue}}v$ i $\mathfrak{ueM}, v \Vdash \Sigma$. Dakle, skup formula Σ je ispunjiv na skupu $R^{\mathfrak{ue}}$–sljedbenika ultrafiltera u, što je i trebalo dokazati. Q.E.D.

Korolar 4.17. *Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{M}'$ modeli i neka su $w \in W$ i $w' \in W'$ proizvoljni svjetovi. Tada vrijedi:*

$$\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w' \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{ueM}, \pi_w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{ueM}', w'.$$

Dokaz. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$. Iz propozicije 4.15 znamo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{ueM}, \Pi_w$ i $\mathfrak{M}', w' \equiv \mathfrak{ueM}', \Pi_{w'}$. To zajedno povlači $\mathfrak{ueM}, \Pi_w \equiv \mathfrak{ueM}', \Pi_{w'}$. No, iz propozicije 4.16 znamo da su modeli $\mathfrak{ueM}$ i $\mathfrak{ueM}'$ m-saturirani. Tada iz propozicije 4.10 slijedi da je $\{\mathfrak{ueM}, \mathfrak{ueM}'\}$ Hennessy-Milnerova klasa modela pa imamo $\mathfrak{ueM}, \Pi_w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{ueM}', \Pi_{w'}$. Slično se dokazuje obrat. Q.E.D.

Model $\mathfrak{ueM}$ ne može biti traženi model $\mathfrak{M}^*$, te $\mathfrak{ueN}$ ne može biti traženi model $\mathfrak{N}^*$ (te modele bili smo istaknuli prilikom skice dokaza van Benthemovog teorema na strani 40). Problem je što na modelima $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{ueM}$, odnosno $\mathfrak{N}$ i $\mathfrak{ueN}$, ne moraju biti istinite iste σ_m-formule.

4.3 Prebrojivo saturirani modeli

Saturirane ili "zasićene" strukture su one koji imaju "maksimalna" svojstva. Za svaki kardinalni broj λ mogu se razmatrati λ-saturirane strukture. Kao glavni alat za konstrukciju saturiranih struktura poslužit će nam ultraprodukti.

Od sada, pa nadalje, smatramo da je σ proizvoljna signatura. Za σ-strukture $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ kažemo da su **elementarno ekvivalentne**, i pišemo $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, ako za svaku zatvorenu σ-formulu F vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{M} \models F \quad \text{ako i samo ako} \quad \mathfrak{N} \models F.$$

Neka je $\mathfrak{M}$ neka σ-struktura. Za svaki $A \subseteq |\mathfrak{M}|$ neka je $\sigma_A = \sigma \cup \{\widehat{a} : a \in A\}$, gdje je za svaki $a \in A$ sa $\widehat{a}$ označen novi konstantski simbol te za $a_1 \neq a_2$ vrijedi $\widehat{a_1} \neq \widehat{a_2}$. Sa $\mathfrak{M}_A$ označavamo σ_A-ekspanziju strukture $\mathfrak{M}$, gdje je za svaki $a \in A$ konstantski simbol $\widehat{a}$ interpretiran s a.

Definicija 4.18. *Neka je* λ *proizvoljan kardinalni broj. Kažemo da je neka* σ*-struktura* $\mathfrak{M}$ λ–**saturirana** *ako za svaki* $A \subseteq |\mathfrak{M}|$*, takav da je* $kard(A) < \lambda$*, i za svaki skup* σ_A*-formula* $\Gamma(x)$ *za koji postoji* σ_A*-model* $\mathfrak{N}$ *tako da* $\mathfrak{M}_A \equiv \mathfrak{N}$ *i postoji* $a \in |\mathfrak{N}|$ *takav da* $\mathfrak{N} \models \Gamma(x)[a]$*, imamo da postoji* $b \in |\mathfrak{M}_A|$ *tako da vrijedi* $\mathfrak{M}_A \models \Gamma(x)[b]$*.*

Struktura koja je ω_1*-saturirana nazivamo i* **prebrojivo saturirana struktura***.*

Svaka konačna struktura je prebrojivo saturirana. Struktura $(\mathbb{Q}, <, =)$ je ω-saturirana. Očito strukutra $(\mathbb{N}, <, =)$ nije prebrojivo saturirana. Dokaz sljedećeg teorema možete pogledati u nastavnim materijalima [6].

Teorem 4.19. *Neka je* $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ *neka familija* σ*-struktura. Neka je* U *proizvoljan prebrojivo nepotpun ultrafilter nad* I*. Tada je ultraprodukt* $\prod_U \mathfrak{M}_i$ *prebrojivo saturiran.*

Dokaz sljedeće propozicije lako je provesti indukcijom po složenosti formule.

Propozicija 4.20. *Neka je* $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ *Kripkeov model,* $I \neq \emptyset$ *i* U *neki ultrafilter nad skupom* I*. Za svaki svijet* $w \in W$ *sa* f_w *označimo konstantnu funkciju s domenom* I *i kodomenom* W *koja je definirana sa* $f_w(i) = w$*. Tada za svaku modalnu formulu* φ *vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \quad \textit{ako i samo ako} \quad \Pi_U \mathfrak{M}, (f_w)^U \Vdash \varphi,$$

tj. vrijedi $\mathfrak{M}, w \equiv \Pi_U \mathfrak{M}, (f_w)^U$*.*

Teorem 4.21. *Svaki prebrojivo saturirani Kripkeov model je* m*-saturirani model. Svaka klasa prebrojivo saturiranih Kripkeovih modela je Hennessy–Milnerova klasa.*

Dokaz prethodnog teorema možete pogledati u knjizi [1]. Sljedeći teorem je jedan od glavnih dijelova u dokazu leme o zaobilaženju.

Teorem 4.22. *Neka su* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *Kripkeovi modeli te* $w \in \mathfrak{M}$ *i* $w' \in \mathfrak{M}'$ *proizvoljni svjetovi. Tada vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$ *ako i samo ako postoji ultrafilter* U *tako da* $\Pi_U \mathfrak{M}, (f_w)^U \underline{\leftrightarrow} \Pi_U \mathfrak{M}', (f_{w'})^U$*,*

gdje su $f_w, f_{w'} : I \to W$ *konstantne funkcije definirane sa* $f_w(i) = w$*, odnosno* $f_{w'}(i) = w'$*.*

Dokaz. Lako je provjeriti da tvrdnja b) povlači tvrdnju a). Dokažimo obrat. Pretpostavimo da vrijedi $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{M}', w'$. Tada iz propozicije 4.20 slijedi $\Pi_U \mathfrak{M}, (f_w)^U \equiv \Pi_U \mathfrak{M}', (f_{w'})^U$.

Neka je U proizvoljan prebrojivo nepotpun ultrafilter nad skupom $\mathbb{N}$ (takav postoji; primjerice, proizvoljan ultrafilter koji sadrži Fréchetov filter nad skupom $\mathbb{N}$.) Iz teorema 4.19 slijedi da su ultrapotencije $\Pi_U \mathfrak{M}$ i $\Pi_U \mathfrak{M}'$ prebrojivo saturirani Kripkeovi modeli. Iz teorema 4.21 slijedi da su te ultrapotencije i m-saturirane. Sada propozicija 4.10 povlači da je klasa Kripkeovih modela $\{\Pi_U \mathfrak{M}, \Pi_U \mathfrak{M}'\}$ Hennessy-Milnerova klasa. Iz svega toga slijedi da $\Pi_U \mathfrak{M}, (f_w)^U \equiv \Pi_U \mathfrak{M}', (f_{w'})^U$ povlači $\Pi_U \mathfrak{M}, (f_w)^U \underline{\leftrightarrow} \Pi_U \mathfrak{M}', (f_{w'})^U$. Q.E.D.

Pojam elementarnog smještenja trebamo kako bi mogli izreći lemu o zaobilaženju. O raznim preslikavanjima između σ-struktura možete čitati u [6].

Definicija 4.23. *Neka su* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{N}$ *dvije* σ*-strukture. Za preslikavanje* $\Phi : |\mathfrak{M}| \to |\mathfrak{N}|$ *kažemo da je* **elementarno smještenje** *ako za svaku* σ*-formulu* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *te sve* $w_1, \ldots, w_n \in |\mathfrak{M}|$ *vrijedi sljedeća ekvivalencija :*

$$\mathfrak{M} \models F[w_1, \ldots, w_n] \text{ ako i samo ako } \mathfrak{M} \models F[\Phi(w_1), \ldots, \Phi(w_n)].$$

Lema 4.24 (o zaobilaženju)**.**
Neka su $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{N}$ *Kripkeovi modeli, te* $w \in \mathfrak{M}$ *i* $v \in \mathfrak{N}$ *proizvoljni svjetovi. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{N}, v$

b) $ue\mathfrak{M}, \pi_w \underline{\leftrightarrow} ue\mathfrak{N}, \pi_v$

c) postoje prebrojivo saturirani modeli $\mathfrak{M}^*$ *i* $\mathfrak{N}^*$*, postoje svjetovi* $w^* \in \mathfrak{M}^*$ *i* $v^* \in \mathfrak{N}^*$*, te postoje elementarna smještenja* $f : \mathfrak{M} \preceq \mathfrak{M}^*$ *i* $g : \mathfrak{N} \preceq \mathfrak{N}^*$ *takva da vrijedi* $f(w) = w^*, g(v) = v^*$*, te* $\mathfrak{M}^*, w^* \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{N}^*, v^*$.

Lema o zaoblaženju konačno nam daje egzistenciju traženih modela koji su potrebni za dokaz van Benthemovog teorema.

Napomena 4.25. *V. Goranko i M. Otto su primijetili da je za dokaz van Benthemovog teorema ključna sljedeća činjenica:*

> *ako je neka* FO*-formula invarijantna za bisimulacije tada postoji* $n \in \mathbb{N}$ *tako da je ta formula invarijantna za* n*-bismulacije.*

Zatim, uočili su da je navedenu činjenicu moguće dokazati na dva različita načina: pomoću klasične teorije modela ili pomoću igara.

E. Rosen je dokazao sljedeću verziju van Benthemovog teorema:

> *Neka* σ*-formula* F *je ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule ako i samo ako formula* F *je invarijantna za bisimulacije konačnih modela.*

T. Perkov i M. Vuković su dokazali verziju van Benthemovog teorema za logike interpretabilnosti u odnosu na Veltmanovu semantiku. S. Horvat, T. Perkov i M. Vuković su dokazali verziju van Benthemovog teorema za logike interpretabilnosti u odnosu na Verbruggeinu semantiku.

Zadaci

1. Dokažite sljedeće tvrdnje.

   a) Za svaki skup I je $\{I\}$ filter. Nazivamo ga **trivijalni** filter.

b) Za svaki skup I partitivni skup $\mathcal{P}(I)$ je filter nad I. Nazivamo ga **nepravi** filter. Sve druge filtre nazivamo **pravi filtri**.

c) Ako je I skup te X njegov proizvoljni podskup tada je skup $F = \{Y \subseteq I \ : X \subseteq Y\}$ filter nad I. Nazivamo ga **filter generiran skupom** X. Ako je X jednočlan skup tada F nazivamo **glavni filter.**

d) Neka je I beskonačan skup. Tada je $F = \{X : X \subseteq I,\ X^c \text{ konačan}\}$ filter. Nazivamo ga **Fréchetov filter**.

e) Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $x \in X$. Tada je sljedeći skup filter:

$$\{Y : Y \subseteq X \text{ takav da } (\exists U \in \mathcal{T})(x \in U \subseteq Y)\}.$$

2. Neka je F filter nad skupom I. Dokažite da tada vrijedi:

   a) ako $X_1, \ldots, X_n \in F$ tada je $X_1 \cap \ldots \cap X_n \in F$

   b) ako $X, Y \in F$ tada je $X \cup Y \in F$

   c) ako je $\{X_j : j \in J\}$ familija skupova iz F tada je $\cup X_j \in F$.

3. Neka je E proizvoljan podskup od $\mathcal{P}(I)$ i neka je skup F definiran ovako:

$$F = \bigcap \{F' \ : \ F' \text{ je filter nad } I,\ E \subseteq F'\}.$$

   Dokažite da tada vrijedi:

   a) F je filter nad I. Nazivamo ga **filter generiran podskupom** E od $\mathcal{P}(I)$.

   b) $F = \{X \subseteq I \ : \ \text{postoje } Y_1, \ldots, Y_n \in E \text{ tako da vrijedi } Y_1 \cap \ldots \cap Y_n \subseteq X\}$.

4. Neka je E prebrojiv podskup skupa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dokažite da je tada filter generiran s E glavni filter.

5. Dokažite sljedeće tvrdnje:

   a) filter F je pravi ako i samo ako $\emptyset \notin F$.

   b) Neka je $E \subseteq \mathcal{P}(I)$, te $F = \cap\{F' : F' \text{ je filter nad } I \text{ takav da } E \subseteq F'\}$. Tada vrijedi: F je pravi filter ako i samo ako E ima **svojstvo konačnih presjeka**, tj. za sve $X_1, \ldots, X_n \in E$ vrijedi $X_1 \cap \ldots \cap X_n \neq \emptyset$.

6. Odredite sve ultrafiltre nad skupom $I = \{1, 2, 3\}$.

7. Neka je I beskonačan skup. Za $X \subseteq I$ kažemo da je **kofinitan** ako je skup $I \setminus X$ konačan. Dokažite da tada vrijedi:

   a) Skup svih kofinitnih podskupova od I ima svojstvo konačnih presjeka.

   b) Postoje ultrafiltri nad I koji ne sadrže niti jedan konačan podskup od I.

   c) Ultrafilter U nad I nije glavni ako i samo ako U sadrži samo beskonačne skupove ako i samo ako U sadrži sve kofinitne podskupove od I.

d) Svaki ultrafilter nad I ima beskonačno mnogo elemenata.

8. Neka je F pravi filter nad skupom I. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

   a) F je ultrafilter

   b) F je maksimalan filter, tj. ne postoji pravi filter F' nad I takav da je F pravi podskup od F'

   c) za sve $X, Y \subseteq I$ vrijedi:

$$X \cup Y \in F \quad \text{ako i samo ako} \quad X \in F \quad \text{ili} \quad Y \in F.$$

9. Dokažite teorem o ultrafiltru, tj. da svaki pravi filter F nad skupom I može biti proširen do ultrafiltra nad skupom I.

10. Neka je U ultrafilter nad skupom I te $X \in U$ proizvoljan. Dokažite da je tada $U \cap \mathcal{P}(X)$ ultrafilter.

11. Neka je U ultrafilter nad skupom I te neka je $I = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Dokažite da tada postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $A_i \in U$. Ako su skupovi A_i u parovima disjunktni dokažite da tada postoji točno jedan $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da je $A_i \in U$.

12. Neka je U ultrafilter nad skupom I za koji postoji konačan skup A za kojeg vrijedi $A \in U$. Dokažite da je tada U glavni ultrafilter.

13. Neka je S skup podskupova nekog skupa I takav da za sve $X_1, \ldots, X_n \in S$ vrijedi da je $X_1 \cap \ldots \cap X_n$ beskonačan skup. Dokažite da je tada skup S sadržan u nekom ultrafiltru nad I koji nije glavni.

14. Dokažite sljedeće tvrdnje:

   a) Svaki ultrafilter U nad $\mathbb{N}$ koji sadrži Fréchetov filter je prebrojivo nepotpun.

   b) Svaki glavni ultrafilter je prebrojivo potpun.

15. Neka je $I \neq \emptyset$ i U ultrafilter nad skupom I. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

   a) ultrafilter U je prebrojivo nepotpun

   b) postoji niz $(Y_n) \subseteq U$ tako da vrijedi sljedeće:

$$\cap Y_n = \emptyset \quad \text{i} \quad I = Y_0 \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \ldots$$

   c) postoji niz $(Z_n) \subseteq \mathcal{P}(I)$ tako da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $Z_n \notin U$, a za sve $n \neq m$ vrijedi sljedeće:

$$Z_n \cap Z_m = \emptyset \quad \text{i} \quad \cup Z_n = I.$$

16. Dokažite da je relacija $\sim$ koja je definirana u definiciji 4.5, jedna relacija ekvivalencije.

17. Dokažite da prilikom definicije ultraprodukta neke familije σ-struktura definicija interpretacije relacijskih, funkcijskih i konstantskih simbola ne ovisi o izboru reprezentanata.

18. Neka je $I \neq \emptyset$, U neki ultrafilter nad skupom I, $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ familija σ-struktura, $\{v_i : i \in I\}$ familija valuacija, gdje je za svaki $i \in I$ v_i valuacija na strukturi $\mathfrak{M}_i$. Kažemo da je valuacija v na ultraproduktu $\mathfrak{M} = \prod_U \mathfrak{M}_i$ **inducirana familijom valuacija** $\{v_i : i \in I\}$ ako za svaku individualnu varijablu x vrijedi $v(x) = (i \mapsto v_i(x))_U$. Dokažite da tada za svaki σ-term t vrijedi $v(t) = (i \mapsto v_i(t))_U$.

19. Neka je $I \neq \emptyset$, U neki ultrafilter nad skupom I, $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ familija σ-struktura, $\{v_i : i \in I\}$ familija valuacija, gdje je za svaki $i \in I$ v_i valuacija na strukturi $\mathfrak{M}_i$ te v valuacija na ultraproduktu $\prod_U \mathfrak{M}_i$ koja je inducirana familijom valuacija $\{v_i : i \in I\}$. Neka je F neka σ-formula. Dokažite da tada vrijedi:
$$\prod_U \mathfrak{M}_i \models_v F \quad \text{ako i samo ako} \qquad \{i : \mathfrak{M}_i \models_{v_i} F\} \in U.$$

20. Dokažite Łosov osnovni teorem o ultraproduktima.

21. Dokažite da je ultrapotencija nad glavnim ultrafiltrom elementarno ekvivalentna početnom modelu.

22. Neka je $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ familija σ-struktura i neka je Γ neki skup σ-rečenica koji ima svojstvo da je svaka rečenica iz skupa Γ istinita na svim strukturama familije osim možda na konačno mnogo njih. Ako U nije glavni ultrafilter, dokažite da onda vrijedi $\prod_U \mathfrak{M}_i \models \Gamma$.

23. Primjenom Łosovog teorema dokažite teorem kompaktnosti za logiku prvog reda.

24. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ Kripkeov model, $w \in W$ neki svijet, I neprazan skup i U neki ultrafilter nad skupom I. Označimo sa f_w konstantnu funkciju s domenom I i kodomenom W koja je definirana sa $f(i) = w$. Dokažite da za svaku modalnu formulu φ vrijedi sljedeća ekvivalencija:
$$\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi \ \text{ ako i samo ako } \ \prod_U \mathfrak{M}, (f_w)^U \Vdash \varphi.$$

25. Neka su $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ i $\mathfrak{N} = (W', R', V')$ Kripkeovi modeli, $w \in W$ i $v \in W'$ neki svjetovi, I neprazan skup i U neki ultrafilter nad skupom I. Označimo sa f_w konstantnu funkciju s domenom I i kodomenom W koja je definirana sa $f(i) = w$. Analogno koristimo oznaku f_v. Neka postoji bisimulacija
$$Z : \prod_U \mathfrak{M}, (f_w)^U \underline{\leftrightarrow} \prod_U \mathfrak{N}, (f_v)^U.$$

Dokažite da tada vrijedi $\mathfrak{M}, w \equiv \mathfrak{N}, v$.

26. Odredite primjer familije Kripkeovih okvira $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$, ultrafiltra U nad skupom I i modalne formule φ, tako da za svaki $i \in I$ vrijedi $\mathfrak{F}_i \Vdash \varphi$, te $\prod\limits_U \mathfrak{F}_i \nVdash \varphi$. Vrijedi li općenito sljedeća implikacija:

$$\text{ako } \prod_U \mathfrak{F}_i \Vdash \varphi \text{ tada } \{i \in I : \mathfrak{F}_i \Vdash \varphi\} \in U \text{ ?}$$

27. Dokažite teorem 4.21.

28. Dokažite teorem 4.22.

29. Dokažite lemu o zaobilaženju.

30. Navedite primjer točkovno generiranog Kripkeovog modela čije ultrafiltersko proširenje nije točkovno generirani model.

31. Dokažite da za svaki Kripkeov okvir $\mathfrak{F}$ postoji ultrafilter U tako da je ultrafiltersko proširenje $ue\mathfrak{F}$ slika pri nekom ograničenom morfizmu od $\prod_U \mathfrak{F}$.

32. Neka je I neki neprazan skup i $\{I_k : k \in K\}$ neka particija skupa I. Neka je za svaki $k \in K$ sa F_k označen neki pravi filter nad skupom I_k, a sa F^* neki pravi filter nad K. Označimo:
$$F = \{X \subseteq I : \ \{k \in K : X \cap I_k \in F_k\} \in F^*\}.$$
Lako je provjeriti da je F pravi filter nad skupom I. Neka je $\{\mathfrak{M}_i : i \in I\}$ neka familija σ-struktura. Dokažite da vrijedi:
$$\prod_F \mathfrak{M}_i \simeq \prod_{F^*} \Big(\prod_{F_k} \mathfrak{M}_i \Big).$$
(Primjetite da ovdje promatramo produkte nad pravim filtrima, a ne ultrafiltrima. Definicija takvih produkata je sasvim analogna definiciji ultraprodukata.)

33. Neka je P neki beskonačan skup prim brojeva, te neka je za svaki $p \in P$ sa F_p označeno neko polje karakteristike p. Neka je U neki ultrafilter nad P koji nije glavni. Dokažite da je tada ultraprodukt $\prod\limits_U F_p$ polje karakteristike nula.

Poglavlje 5

Modalna definabilnost

Vidjeli smo primjere formula koje nisu valjane, ali su valjane na svim okvirima neke klase. Ako vrijedi i obrat, tj. da su svi okviri na kojima su dane formule valjane nužno u toj klasi, govorimo o modalnoj definabilnosti. Sada ćemo formalno definirati pojam modalne definabilnosti raznih klasa struktura (točkovnih modela, modela i okvira) jednom formulom, odnosno skupom formula. Istaknuti ćemo glavne rezultate o modalnoj definabilnosti klasa točkovnih modela i klasa okvira. Glavni rezultat o modalnoj definabilnosti klasa okvira je Goldblatt-Thomasonov teorem.

Neka je Γ neki skup modalnih formula. Pišemo $\mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$ ako $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ za svaku formulu $\varphi \in \Gamma$ (slično $\mathfrak{M} \Vdash \Gamma$, $\mathfrak{F} \Vdash \Gamma$). Označimo redom: $Mod_l(\Gamma) = \{(\mathfrak{M}, w) : \mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma\}$, $Mod_g(\Gamma) = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \Vdash \Gamma\}$ i $Fr(\Gamma) = \{\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \Vdash \Gamma\}$.

Definicija 5.1. *Neka je $\mathcal{K}$ klasa točkovnih modela. Kažemo da skup formula Γ* **definira klasu točkovnih modela** *$\mathcal{K}$ ako za svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w)$ vrijedi:*

$$(\mathfrak{M}, w) \in \mathcal{K} \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{M}, w \Vdash \Gamma$$

tj. ako $\mathcal{K} = Mod_l(\Gamma)$. Kažemo da skup formula Γ **definira klasu modela** *$\mathcal{K}$ ako $\mathcal{K} = Mod_g(\Gamma)$. Skup formula Γ* **definira klasu okvira** *$\mathcal{K}$ ako $\mathcal{K} = Fr(\Gamma)$.*

Ako je $\Gamma = \{\varphi\}$, pišemo $Mod_l(\varphi)$ umjesto $Mod_l(\{\varphi\})$, te analogno $Mod_g(\varphi)$ i $Fr(\varphi)$.

Kažemo da skup formula Γ **definira svojstvo struktura** *ako definira klasu svih struktura s tim svojstvom.*

Kažemo da je **klasa (svojstvo) struktura modalno definabilna** *ako postoji skup modalnih formula koji je definira.*

U sljedećem primjeru navodimo klase okvira za koje smo već prije dokazali da su modalno definabilne.

Primjer 5.2. *a) Formula $\Box p \to p$ definira refleksivnost (okvira). Formula $p \to \Diamond p$ također definira refleksivnost.*

b) *Formula $\Box p \to \Box\Box p$ definira tranzitivnost. Formula $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$ također definira tranzitivnost.*

c) *Formula $\neg\Box p \to \Box\neg\Box p$ definira klasu svih euklidskih okvira. Formula $\Diamond p \to \Box\Diamond p$ isto to čini.*

d) *Formula $\Box(\Box p \to p) \to \Box p$ definira klasu svih tranzitivnih i inverzno dobro fundiranih okvira.*

Primjer 5.3. *Refleksivnost okvira je modalno definabilna (formulom $\Box p \to p$). No, refleksivnost modela nije! Zaista, neka je $\mathcal{K}$ klasa svih modela $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ takva da je relacija dostiživosti R refleksivna. Definiramo modele $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$ ovako: $\mathfrak{M}_1 = (\mathbb{N}, <, V_1)$, gdje je $V_1(p) = \emptyset$ za svaku varijablu p, te $\mathfrak{M}_2 = (\{w\}, \{(w, w)\}, V_2)$, gdje je $V_2(p) = \emptyset$ za svaku varijablu p. Očito vrijedi $\mathfrak{M}_1 \notin \mathcal{K}$ i $\mathfrak{M}_2 \in \mathcal{K}$. Lako je provjeriti da je relacija $\mathbb{N} \times \{w\}$ bisimulacija između modela $\mathfrak{M}_1$ i $\mathfrak{M}_2$.*

Pretpostavimo da neki skup modalnih formula Γ definira klasu modela $\mathcal{K}$, tj. $\mathcal{K} = Mod_g(\Gamma)$. Tada $\mathfrak{M}_2 \Vdash \Gamma$. No, modalne formule su invarijantne na bisimulacije, pa $\mathfrak{M}_1 \Vdash \Gamma$. Dakle, $\mathfrak{M}_1 \in Mod_g(\Gamma) = \mathcal{K}$ pa je dobivena kontradikcija.

U prethodnom primjeru za dokaz nedefinabilnosti jedne klase modela koristili smo bisimulacije, tj. malo točnije, koristili smo da su modalne formule invarijantne za bisimulacije. Iz toga zaključujemo da modalno definabilne klase modela moraju biti zatvorene za bisimulacije. To znači da ako je $\mathcal{K}$ neka modalno definabilna klasa modela te je $\mathfrak{M} \in \mathcal{K}$ i $\mathfrak{M} \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{N}$, tada mora vrijediti $\mathfrak{N} \in \mathcal{K}$.

U sljedećem primjeru navodimo neka svojstva okvira koja nisu modalno definabilna. U tu svrhu koristimo činjenicu da generirani podokviri, disjunktne unije okvira i surjektivni ograničeni morfizmi okvira čuvaju valjanost formula na okvirima.

Primjer 5.4. a) *Nerefleksivnost nije modalno definabilna: generirani podokvir nerefleksivnog okvira može biti refleksivan.*

b) *Konačnost nije modalno definabilna: disjunktna unija konačnih okvira može biti beskonačna.*

c) *Irefleksivnost nije modalno definabilna. U tu svrhu definiramo:*

$$\mathfrak{F}_1 = (\{w_1, w_2\}, \{(w_1, w_2), (w_2, w_1)\}) \quad i \quad \mathfrak{F}_2 = (\{w\} : \{(w, w)\}).$$

Definiramo funkciju $f : \{w_1, w_2\} \to \{w\}$ s $f(w_1) = f(w_2) = w$. Tada je f surjektivni ograničeni morfizam između irefleksivnog i neirefleksivnog okvira.

5.1 Elementarne klase struktura

U sljedećim razmatranjima koristiti ćemo i pojam definabilne klase okvira u logici prvog reda. Umjesto definabilnih klasa uobičajno je govoriti o elementarnim klasama. Taj pojam definiramo u sljedećoj definiciji.

Definicija 5.5. *Za klasu okvira $\mathcal{K}$ kažemo da je* **elementarna** *(*Δ**-elementarna***) ako postoji (konačan) skup Γ formula prvog reda tako da za svaki okvir $\mathfrak{F}$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:*

$$\mathfrak{F} \in \mathcal{K} \quad \textit{ako i samo ako} \quad \mathfrak{F} \models \Gamma.$$

Sada navodimo neke rezultate o elementarnim klasama σ-struktura (ovdje je σ proizvoljna signatura). Više detalja o elementarnim klasama struktura možete pogledati u [6].

Teorem 5.6. *Neka je $\mathcal{K}$ neka klasa σ–struktura. Tada vrijedi:*

a) klasa $\mathcal{K}$ je elementarna ako i samo ako klasa $\mathcal{K}$ je zatvorena za ultraprodukte i elementarnu ekvivalenciju

b) klasa $\mathcal{K}$ je Δ–elementarna ako i samo ako klase $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}^c$ su zatvorene za ultraprodukte i elementarnu ekvivalenciju.

Teorem 5.7. *Neka je $\mathcal{K}$ neka klasa σ–struktura. Tada je ekvivalentno:*

a) klasa $\mathcal{K}$ je elementarna

b) klasa $\mathcal{K}$ je zatvorena za ultraprodukte i izomorfizme, a klasa $\mathcal{K}^c$ je zatvorena za ultrapotencije.

5.2 Modalna definabilnost klasa točkovnih modela

U ovom dijelu razmatramo modalnu definabilnost klasa točkovnih modela, tj. klasa koje sadrže uređene parove oblika $(\mathfrak{M}, w)$, gdje je $\mathfrak{M}$ Kripkeov model i $w \in \mathfrak{M}$ proizvoljan svijet. Želimo istaknuti da smo do sada razmatrali modalnu definabilnost jednom formulom. Sada ćemo razmatrati i definabilnost skupom formula (koji mogu biti i beskonačni).

Primjenom osnovnog svojstva standardne translacije odmah slijedi tvrdnja sljedeće propozicije.

Propozicija 5.8. *Ako je klasa (točkovnih) Kripkeovih modela modalno definabilna jednom (skupom) formula tada je ta klasa Δ-elementarna (elementarna).*

Obrat tvrdnje iz prethodne propozicije, naravno, ne vrijedi općenito. Iz van Benthemovog teorema slijedi da ako je neka klasa $\mathcal{K}$ točkovnih Kripkeovih modela Δ-elementarna, i to pomoću formule logike prvog reda koja je invarijantna za bisimulacije, tada je klasa $\mathcal{K}$ modalno definabilna jednom modalnom formulom. Sada razmatramo modalnu definabilnost klasa točkovnih modela jer je u tim terminima prirodnije formulirati rezultate, te točkovni modeli prirodnije ističu lokalnost modalnih formula. Prvo definiramo zatvorenost klasa točkovnih okvira na osnovne operacije.

Definicija 5.9. *Za neku klasu $\mathcal{K}$ točkovnih Kripkeovih modela kažemo da je zatvorena za:*

a) bismulacije ako za svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w) \in \mathcal{K}$ *i svaki točkovni model* $(\mathfrak{N}, v)$ *vrijedi da* $\mathfrak{M}, w \underline{\leftrightarrow} \mathfrak{N}, v$ *povlači* $(\mathfrak{N}, v) \in \mathcal{K}$

b) disjunktne unije ako za svaku familiju točkovnih modela $\{(\mathfrak{M}_i, w_i) : i \in I\} \subseteq \mathcal{K}$, *pri čemu za sve* $i \neq j$ *imamo* $|\mathfrak{M}_i| \cap |\mathfrak{M}_j| = \emptyset$, *imamo da za svaki* $j \in I$ *vrijedi* $\biguplus_i \mathfrak{M}_i, w_j \in \mathcal{K}$

c) ograničene morfizme ako za svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w) \in \mathcal{K}$ *i svaki ograničeni morfizam* $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ *vrijedi* $(f(\mathfrak{M}), f(w)) \in \mathcal{K}$

d) generirane podmodele ako ako za svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w) \in \mathcal{K}$ *i svaki točkovni model* $(\mathfrak{N}, v)$, *koji je generirani podmodel od* $(\mathfrak{M}, w)$, *vrijedi* $(\mathfrak{N}, v) \in \mathcal{K}$

e) ultraprodukte ako za svaku familiju $\{(\mathfrak{M}_i, w_i) : i \in I\} \subseteq \mathcal{K}$ *i svaki ultrafilter* U *nad skupom* I *vrijedi* $(\Pi_U \mathfrak{M}_i, w^U) \in \mathcal{K}$, *gdje je* w^U *klasa ekvivalencije funkcije* w *koja je definirana sa* $w(i) = w_i$.

Tvrdnje sljedeće propozicije lako je provjeriti.

Propozicija 5.10. *Neka je* $\mathcal{K}$ *neka klasa točkovnih modela koja je modalno definabilna nekim skupom modalnih formula. Tada je klasa* $\mathcal{K}$ *zatvorena za bisimulacije, disjunktne unije, ograničene morfizme, generirane podmodele i ultraprodukte.*

Lema 5.11. *Neka je* Σ *neki skup modalnih formula. Neka je* $\mathcal{K}$ *klasa točkovnih modela u kojoj je skup formula* Σ *konačno ispunjiv. Tada je skup* Σ *istinit na nekom ultraproduktu modela iz klase* $\mathcal{K}$.

Dokaz. Neka je $I = \{\Sigma_0 : \Sigma_0$ je konačni podskup od $\Sigma\}$. Iz pretpostavke leme slijedi da za svaki $i \in I$ postoji točkovni model $(\mathfrak{M}_i, w_i) \in \mathcal{K}$ tako da vrijedi $\mathfrak{M}_i, w_i \Vdash i$. Za svaku formulu $\varphi \in \Sigma$ označimo $\widehat{\varphi} = \{i \in I : \varphi \in i\}$. Skup $E = \{\widehat{\varphi} : \varphi \in \Sigma\}$ ima svojstvo konačnih presjeka jer za sve formule $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Sigma$ imamo $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \in \widehat{\varphi_1} \cap \ldots \cap \widehat{\varphi_n}$. Iz propozicije 4.4 slijedi da postoji ultrafilter U nad skupom I takav da je $E \subseteq U$.

Primijetimo da za svaku formulu $\varphi \in \Sigma$ te svaki $i \in \widehat{\varphi}$ vrijedi $\varphi \in i$, a onda $\mathfrak{M}_i, w_i \Vdash \varphi$. U drugu ruku za svaku formulu $\varphi \in \Sigma$ imamo $\widehat{\varphi} \in E$, a onda i $\widehat{\varphi} \in U$. Tada slijedi da za svaku formulu $\varphi \in \Sigma$ vrijedi $\widehat{\varphi} \subseteq \{i \in I : \mathfrak{M}_i, w_i \Vdash \varphi\}$, a onda iz definicije ultrafiltra imamo $\{i \in I : \mathfrak{M}_i, w_i \Vdash \varphi\} \in U$. Iz osnovnog svojstva standardne translacije znamo da za svaku formulu $\varphi \in \Sigma$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i, w_i \Vdash \varphi\} \in U \text{ ako i samo ako } \{i \in I : \mathfrak{M}_i \models ST_x(\varphi)[w_i]\} \in U.$$

Iz Łosovog teorema znamo da vrijedi sljedeće:

$$\{i \in I : \mathfrak{M}_i \models ST_x(\varphi)[w_i]\} \in U \text{ ako i samo ako } \Pi_U \mathfrak{M}_i \models ST_x(\varphi)[w^U].$$

Primjenom osnovnog svojstva standardne translacije dobivamo $\Pi_U \mathfrak{M}_i, w^U \Vdash \varphi$. Budući da je formula $\varphi \in \Sigma$ bila proizvoljna, tada zaključujemo da smo dokazali $\Pi_U \mathfrak{M}_i, w^U \Vdash \Sigma$. Q.E.D.

Napomena 5.12. *Dokaz prethodne leme jako je sličan dokazu teorema kompaktnosti za logiku prvog reda primjenom Łosovog teorema. Taj dokaz možete pogledati u [6].*

Teorem 5.13. *(modalna definabilnost klasa točkovnih modela skupom formula) Neka je $\mathcal{K}$ neka klasa točkovnih modela. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) klasa $\mathcal{K}$ je definabilna skupom modalnih formula

b) klasa $\mathcal{K}$ je zatvorena za bisimulacije i ultraprodukte, a komplement $\mathcal{K}^c$ je zatvoren na ultrapotencije.

Dokaz. Dokazujemo prvo da tvrdnja a) povlači tvrdnju b). Neka je Σ skup modalnih formula koji definira klasu $\mathcal{K}$. Za ilustraciju ćemo samo dokazati da je klasa $\mathcal{K}^c$ zatvorena za ultrapotencije. Neka je $(\mathfrak{M}, w) \in \mathcal{K}^c$ proizvoljan točkovni model. Zatim, neka je I neki neprazan skup i U proizvoljan ultrafilter nad skupom I. Tada imamo $\mathfrak{M}, w \nVdash \Sigma$, tj. postoji formula $\varphi \in \Sigma$ takva da vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \neg\varphi$. Iz osnovnog svojstva standardne translacije slijedi $\mathfrak{M} \models ST_x(\neg\varphi)[w]$. Iz Łosovog teorema tada slijedi $\Pi_U \mathfrak{M} \models ST_x(\neg\varphi)[f^U]$, gdje je $f : I \to |\mathfrak{M}|$ konstantna funkcija koja je definirana sa $f(i) = w$. Sada opet primjenom osnovnog svojstva standardne translacije slijedi $\Pi_U \mathfrak{M}, f^U \Vdash \neg\varphi$. Time smo dokazali da vrijedi $(\Pi_U \mathfrak{M}, f^U) \in \mathcal{K}^c$.

Sada dokazujemo da tvrdnja b) povlači tvrdnju a). Lako je vidjeti da je klasa $\mathcal{K}^c$ zatvorena za bisimulacije. Definiramo sljedeći skup formula:

$$\Sigma = \{\varphi : \text{ za svaki točkovni model } (\mathfrak{M}, w) \in \mathcal{K} \text{ vrijedi } \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi.\}$$

Dokazujemo da skup formula Σ definira klasu $\mathcal{K}$. Iz definicije skupa Σ slijedi da za svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w) \in \mathcal{K}$ vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$. Dakle, treba još dokazati obrat, tj. da za svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w)$ koji ima svojstvo $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$, vrijedi $(\mathfrak{M}, w) \in \mathcal{K}$. Neka je $(\mathfrak{M}, w)$ proizvoljni točkovni model za koji vrijedi $\mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma$. Označimo $\Sigma' = \{\varphi : \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi\}$. Nije teško dokazati da je skup formula Σ' konačno ispunjiv u klasi $\mathcal{K}$. Iz leme 5.11 slijedi da postoji familija točkovnih modela $\{(\mathfrak{M}_i, w_i) : i \in I\} \subseteq \mathcal{K}$ i ultrafilter U nad skupom I tako da vrijedi $\Pi_U \mathfrak{M}_i, f^U \Vdash \Sigma'$, gdje je $f : I \to \cup_{i \in I} |\mathfrak{M}_i|$ funkcija koja je definirana sa $f(i) = w_i$. Označimo $\mathfrak{N} = \Pi_U \mathfrak{M}_i$ i $v = f^U$. Iz pretpostavke teorema znamo da vrijedi $(\mathfrak{N}, v) \in \mathcal{K}$. Iz $\mathfrak{N}, v \Vdash \Sigma'$ i definicije skupa formula Σ' lako slijedi da vrijedi $\mathfrak{N}, v \equiv \mathfrak{M}, w$. Tada iz teorema 4.22 slijedi da postoji ultrafilter V tako da vrijedi sljedeće:

$$\Pi_V \mathfrak{M}, (f_w)^V \underline{\leftrightarrow} \Pi_V \mathfrak{N}, (f_v)^V.$$

Budući da $(\mathfrak{N}, v) \in \mathcal{K}$ te je po pretpostavci teorema klasa $\mathcal{K}$ zatvorena za ultraprodukte, tada imamo $(\Pi_V \mathfrak{N}, (f_v)^V) \in \mathcal{K}$. Sada pretpostavka o zatvorenosti klase $\mathcal{K}$ na bisimulacije povlači $(\Pi_V \mathfrak{M}, (f_w)^V) \in \mathcal{K}$. Konačno, iz pretpostavke teorema o zatvorenosti klase $\mathcal{K}^c$ na ultrapotencije i $(\Pi_V \mathfrak{M}, (f_w)^V) \notin \mathcal{K}^c$ slijedi $(\mathfrak{M}, w) \notin \mathcal{K}^c$, tj. $(\mathfrak{M}, w) \in \mathcal{K}$. Q.E.D.

Teorem 5.14. *(modalna definabilnost klasa točkovnih modela jednom formulom) Neka je $\mathcal{K}$ neka klasa točkovnih modela. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

a) klasa $\mathcal{K}$ je definabilna jednom modalnom formulom

b) klase $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}^c$ su zatvorene za bisimulacije i ultraprodukte.

Dokaz. Dokazujemo samo da tvrdnja b) povlači tvrdnju a). Uočimo da klase $\mathcal{K}$ i $\mathcal{K}^c$ zadovoljavaju uvjete upravo dokazanog prethodnog teorema. Tada postoji skup formula Σ_1 koji definira klasu $\mathcal{K}$ te postoji skup formula Σ_2 koji definira klasu $\mathcal{K}^c$. Očito skup formula $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ nije ispunjiv. Tada iz teorema kompaktnosti za modalnu logiku slijedi da postoje skupovi $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subseteq \Sigma_1$ i $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\} \subseteq \Sigma_2$ tako da skup formula $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \cup \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ nije ispunjiv. Iz toga posebno slijedi da za svaki točkovni model $(\mathfrak{M}, w)$ imamo $\mathfrak{M}, w \Vdash (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \to (\neg\psi_1 \vee \ldots \vee \neg\psi_m)$. Lako je provjeriti da formula $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ definira klasu $\mathcal{K}$. Q.E.D.

5.3 Standardna translacija drugog reda

Uočimo da su, primjerice, refleksivnost i tranzitivnost, za koje smo u nekom prethodnom primjeru vidjeli da su modalno definabilna, također i elementarna svojstva, za razliku od inverzne dobre fundiranosti. Iako su i mnoga druga modalno definabilna svojstva elementarna, ne postoji prirodna općenita veza između modalne definabilnosti klasa okvira i elementarnosti. No, postoji prirodna veza između modalne definabilnosti i definabilnosti u logici drugog reda. Naime, definicija valjanosti okvira kvantificira po valuacijama, tj. po podskupovima okvira. Primjerice, $\mathfrak{F} \Vdash p \to \Box p$ zapravo znači $\mathfrak{F} \models \forall P \forall x (Px \to \forall y (xRy \to Py))$.

Nećemo detaljno govoriti o logici drugog reda, nego ćemo se osloniti samo na intuitivno razumijevanje da se dopušta kvantifikacija ne samo po individualnim varijablama, nego i po varijablama kojima se valuacijom pridružuju relacije na nosaču (u našem slučaju trebaju nam samo unarne relacije, tj. podskupovi), tj. umjesto signature σ_m koju smo koristili za standardnu translaciju sada imamo signaturu drugog reda u kojoj je svaki jednomjesni relacijski simbol $P \in \sigma_m$ sada varijabla drugog reda po kojoj se može kvantificirati. Samo R (uz jednakost) ostaje relacijski simbol, pa se okvir može promatrati kao struktura za tu signaturu.

Propozicija 5.15. *Neka je $\mathfrak{F}$ neki okvir a φ proizvoljna modalna formula. Tada vrijedi:*

$$\mathfrak{F} \Vdash \varphi \text{ ako i samo ako } \mathfrak{F} \models \forall P_1 \ldots \forall P_n \forall x ST_x(\varphi),$$

gdje su $P_1, \ldots, P_n$ varijable drugog reda koje odgovaraju propozicionalnim varijablama iz φ.

5.4 Nedefinabilnost

Ispuštajući dio definicije koji se odnosi na valuaciju, jasno je kako se definiraju osnovne konstrukcije okvira: disjunktna unija, generirani podokvir i ograničeni morfizam. Koristeći već dokazanu invarijantnost modalnih formula na analogne konstrukcije modela, lako se dokazuje sljedeća propozicija.

Propozicija 5.16. *Disjunktna unija okvira, generirani podokvir i surjektivni ograničeni morfizam okvira čuvaju valjanost modalnih formula.*

Ovo nam omogućuje dokazivanje nedefinabilnosti nekih svojstava. U sljedećem primjeru ilustriramo korištnje disjunktne unije i ograničenog morfizma za dokaz modalne nedefinabilnosti nekih svojstava struktura.

Primjer 5.17. *Irefleksivnost nije modalno definabilna. Naime, za Kripkeove okvire* $\mathfrak{F} = (\{a,b\}, \{(a,b),(b,a)\})$ *i* $\mathfrak{F}' = (\{c\}, \{(c,c)\})$*, sa* $f(a) = f(b) = c$ *dan je surjektivni ograničeni morfizam. Primijetimo da je okvir* $\mathfrak{F}$ *irefleksivan, a okvir* $\mathfrak{F}'$ *nije. Kada bi irefleksivnost bila modalno definabilna nekim skupom formula* Γ*, vrijedilo bi* $\mathfrak{F} \Vdash \Gamma$*. No, onda zbog očuvanja valjanosti pri ograničenom morfizmu vrijedilo bi i* $\mathfrak{F}' \Vdash \Gamma$*. To bi povlačilo da je i okvir* $\mathfrak{F}'$ *irefleksivan, a nije.*

Analogno, koristeći disjunktnu uniju možemo dokazati da svojstvo konačnosti modela nije modalno definabilna. Koristeći generirane podokvire može se pokazati da klasa svih okvira, u kojima je svaki svijet dostiživ iz nekog svijeta, nije modalno definabilna.

Što se tiče ultrafilterskog proširenja okvira, lako se dokazuje da vrijedi očuvanje valjanosti u suprotnom smjeru.

Propozicija 5.18. *Ultrafiltersko proširenje reflektira valjanost modalnih formula, tj. ako je* $\mathfrak{ue}\mathfrak{F} \Vdash \varphi$*, onda je* $\mathfrak{F} \Vdash \varphi$*.*

Obrat tvrdnje iz prethodne propozicije općenito ne vrijedi. Ako je φ modalna formula koja definira neko svojstvo okvira koje je elementarno, tada vrijedi obrat (vidi [1]).

Postoje svojstva koja nisu modalno definabilna, iako su očuvana na tri osnovne konstrukcije struktura.

Primjer 5.19. *Promotrimo klasu svih okvira takvih da svaki svijet ima refleksivnog sljedbenika. Drugim riječima, radi se o elementarnoj klasi definiranoj formulom* $\forall x \exists y (R(x,y) \land R(y,y))$*. Lako se vidi da je to svojstvo očuvano na disjunktne unije okvira, generirane podokvire i surjektivne ograničene morfizme okvira. No, ta klasa nije modalno definabilna. Naime, za okvir* $\mathfrak{F} = (\mathbb{N}, <)$ *se jednostavno pokazuje da* $\mathfrak{ue}\mathfrak{F}$ *ima to svojstvo, a* $\mathfrak{F}$ *ga, naravno, nema.*

5.5 Goldblatt-Thomasonov teorem

Sljedeći teorem pokazuje da su dosad navedene konstrukcije dovoljne za karakterizaciju modalno definabilnih svojstava među elementarnim svojstvima. Prije iskaza teorema definiramo još jedan pojam koji nam je potreban radi iskaza teorema.

Definicija 5.20. *Neka je* $\mathcal{K}$ *neka klasa okvira. Kažemo da* **klasa** $\mathcal{K}$ **reflektira ultrafilterska proširenja** *ako za svaki okvir* $\mathfrak{F}$ *vrijedi da činjenica* $\mathfrak{ue}\mathfrak{F} \in \mathcal{K}$ *povlači* $\mathfrak{F} \in \mathcal{K}$*.*

Teorem 5.21 (Goldblatt-Thomason)**.** *Elementarna klasa okvira je modalno definabilna ako i samo ako je zatvorena na disjunktne unije, generirane podokvire i surjektivne ograničene morfizme i reflektira ultrafilterska proširenja.*

Dokaz prethodnog teorema možete vidjeti u [1] i [4]. Ovdje ćemo dati skicu dokaza. Dokaz jednog smjer je relativno lagan. Naravno, radi se o smjeru gdje se tvrdi da modalna definabilnost povlači zatvorenost na disjunktne unije, generirane podokvire i surjektivne ograničene morfizme te da se reflektiraju ultrafilterska proširenja.

Neka je $\mathcal{K}$ neka elementarna klasa okvira koja je modalno definabilna skupom modalnih formula Γ. Tada za svaki okvir $\mathfrak{F}$ vrijedi sljedeća ekvivalencija:

$$\mathfrak{F} \in \mathcal{K} \text{ ako i samo ako } \mathfrak{F} \Vdash \Gamma.$$

Neka je $\{\mathfrak{F}_i : i \in I\}$ neka familija okvira iz klase $\mathcal{K}$. Tada za svaki $i \in I$ vrijedi $\mathfrak{F}_i \Vdash \Gamma$. Budući da disjunktne unije čuvaju valjanost na okvirima tada vrijedi $\biguplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i \Vdash \Gamma$, a onda imamo $\biguplus_{i \in I} \mathfrak{F}_i \in \mathcal{K}$. Time smo dokazali da je klasa $\mathcal{K}$ zatvorena na disjunktne unije.

Radi ilustracije dokazujemo još da klasa $\mathcal{K}$ reflektira ultrafilterska proširenja. Neka je $\mathfrak{F}$ neki okvir za koji vrijedi $\mathfrak{ue}\mathfrak{F} \in \mathcal{K}$. Tada vrijedi $\mathfrak{ue}\mathfrak{F} \Vdash \Gamma$. Budući da ultrafilterska proširenja "reflektiraju" valjanost, tada vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \Gamma$, a onda imamo $\mathfrak{F} \in \mathcal{K}$.

Sada dajemo skicu dokaza drugog smjera u Goldblatt-Thomasonovom teoremu. Neka je $\mathcal{K}$ klasa okvira koja je zatvorena na disjunktne unije, generirane podokvire i surjektivne ograničene morfizme, te neka reflektira ultrafilterska proširenja. Neka je $\Lambda_{\mathcal{K}} = \{\varphi : \mathfrak{F} \Vdash \varphi, \text{ za svaki okvir } \mathfrak{F} \in \mathcal{K}\}$.

Dokazuje se da skup $\Lambda_{\mathcal{K}}$ definira klasu $\mathcal{K}$. Ovdje ćemo dati samo skicu tog dokaza. Neka je $\mathfrak{F}$ proizvoljan okvir za koji vrijedi $\mathfrak{F} \Vdash \Lambda_{\mathcal{K}}$. Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da je okvir $\mathfrak{F}$ generiran jednim svijetom w.

Definiramo skup propozicionalnih varijabli $\Phi = \{p_A : A \subseteq W\}$. Na okviru $\mathfrak{F}$ definiramo valuaciju V sa: $V(p_A) = A$. Neka je $\mathfrak{M} = (W, R, V)$.

Neka je $\Delta = \{\varphi : \mathfrak{M}, w \Vdash \varphi\}$. Dokazuje se da je skup formula Δ ispunjiv u klasi $\mathcal{K}$. (Prvo se dokazuje da je skup Δ konačno ispunjiv u klasi $\mathcal{K}$. Tada je skup Δ ispunjiv na nekom ultraproduktu okvira iz klase $\mathcal{K}$. Budući da je klasa $\mathcal{K}$ elementarna, tada je ona zatvorena za ultraprodukte, pa je skup Δ ispunjiv u klasi $\mathcal{K}$.)

Budući da je skup Δ ispunjiv u klasi $\mathcal{K}$ tada postoji okvir $\mathfrak{F}' = (W', R') \in \mathcal{K}$, valuacija V' na tom okviru i svijet $b \in W'$ tako da za model $\mathfrak{N} = (W', R', V')$ vrijedi $\mathfrak{N}, b \Vdash \Delta$. Budući da je po pretpostavci klasa $\mathcal{K}$ zatvorena za generirane podokvire i valjanost je očuvana za generirane podokvire, možemo pretpostaviti da je okvir $\mathfrak{F}'$ generiran svijetom b.

Sada se dokazuje da je ultrafiltersko proširenje $\mathfrak{ue}\mathfrak{F}$ slika neke ultrapotencije od $\mathfrak{F}'$ pri nekom ograničenom morfizmu. (Prvo se razmatra ultrapotencija $\mathfrak{N}'$ od $\mathfrak{N}$ za koju znamo da je prebrojivo saturirani model. No, znamo da je svaki prebrojivo saturirani model nužno m–saturiran. Za svaki $s \in \mathfrak{M}'$ definira se $f(s) = \{A \subseteq W : \mathfrak{M}', s \Vdash p_A.\}$ Dokazuje se da je $f(s)$ ultrafilter nad W, te da je funkcija f ograničeni morfizam i surjekcija.)

Budući da vrijedi $\mathfrak{F}' \in \mathcal{K}$ tada je i ultrapotencija od $\mathfrak{F}'$ element od $\mathcal{K}$ (jer je po pretpostavci klasa $\mathcal{K}$ elementarna, pa je zatvorena za ultraprodukte, a onda posebno je zatvorena za ultrapotencije.) No, ultrafiltersko prošienje $\mathfrak{ue}\mathfrak{F}$ je slika pri ograničenom morfizmu elementa klase $\mathcal{K}$ (slika je ultrapotencije okvira $\mathfrak{F}'$), pa iz pretpostavke o zatvorenosti klase $\mathcal{K}$ na slike ograničenih morfizama slijedi $\mathfrak{ue}\mathfrak{F} \in \mathcal{K}$. Konačno, iz pretpostavke da klasa $\mathcal{K}$ reflektira ultrafilterska proširenja slijedi $\mathfrak{F} \in \mathcal{K}$.

Zadaci

1. Dokažite propoziciju 5.15.

2. Dokažite propoziciju 5.16.

3. Dokažite propoziciju 5.18.

4. Dokažite da svojstvo "svaki svijet ima refleksivnog sljedbenika" očuvano za disjunktne unije okvira, generirane podokvire te surjektivne ogranične morfizme okvira.

5. Neka je $\mathfrak{F} = (\mathbb{N}, <)$. Dokažite da svaki svijet ultrafilterskog proširenja $\mathfrak{ue}\mathfrak{F}$ ima refleksivnog sljedbenika.

6. Dokažite da svojstvo antisimetričnosti relacije nije modalno definabilno.
   Uputa. Na okvirima $(\mathbb{N}, \{(0,1),(1,2),(2,3),\ldots\})$ i $(\{P,N\}, \{(P,N),(N,P)\})$ promotrite funkciju f koja je definirana sa:

$$f(n) = \begin{cases} N, & \text{ako je } n \text{ neparan,} \\ P, & \text{ako je } n \text{ paran} \end{cases}$$

Bibliografija

[1] P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic,* Springer–Verlag, 2001.

[2] S. Demri, V. Goranko, M. Lange, *Temporal Logic in Computer Science*, Cambridge University Press, 2016.

[3] T. Perkov, M. Vuković, *Semantike logika dokazivosti i interpretabilnosti*, nastavni materijali za poslijediplomski kolegij, PMF–MO, Zagreb, 2017.
URL: https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/Semantike-logika-dokazivosti-interpretabilnosti-2017.pdf

[4] T. Perkov, M. Vuković, *Algebarska semantika modalne logike*, nastavni materijali za poslijediplomski kolegij, PMF–MO, Zagreb, 2020.
URL: https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/algebarska-semantika-modalne-logike-2020.pdf

[5] M. Vuković, *Matematička logika*, Element, 2009.

[6] M. Vuković, *Primijenjena logika*, nastavni materijali za poslijediplomski kolegij, PMF–MO, Zagreb, 2011.
URL: https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/APPLOG-skripta-2011.pdf

Kazalo

λ-saturirana struktura, 50
$m_\Box$, 47
$m_\Diamond$, 47
n-bismulacija, 21
n-ekvivalentni svjetovi, 16

alfabet
    osnovnog modalnog jezika, 3
atomarna formula, 4
atomarno ekvivalentni svjetovi, 16

bisimulacija, 17
bisimulacijska igra, 19

disjunktna unija, 13

elementarna klasa okvira, 59
elementarno smještenje, 51

filter, 44
    Fréchetov, 52
    generiran podskupom, 52
    generiran skupom, 52
    glavni, 52
    nepravi, 52
    pravi, 44, 52
    trivijalni, 51
filtracija modela, 24
formula
    atomarna, 4
    ispunjiva, 7
    ispunjiva na modelu, 7
    istinita na modelu, 7
    oboriva, 7
    oboriva na modelu, 7
    osnovnog modalnog jezika, 4
    valjana, 8
    valjana na klasi okvira, 8
    valjana na okviru, 8
    valjana na svijetu okvira, 8
funkcija
    $m_\Box$, 47
    $m_\Diamond$, 47

generirani podmodel, 13
globalna semantička posljedica, 9
Goldblatt–Thomasonov teorem, 64

Hennessy–Milnerovo svojstvo, 46
Hennessy-Milnerova klasa, 46

inkonzistentan skup formula, 28
ispunjiva formula, 7
ispunjivost formule na modelu, 7
istinitost formule na modelu, 7
istinitost formule na svijetu modela, 7
izvediva formula u sistemu K, 28

kanonski model, 30
klasa modela
    modalno definabilna, 57
klasa okvira
    elementarna, 59
    modalno definabilna, 57
klasa okvira reflektira ultrafilterska proširenja, 63
kofinitan skup, 52
konzistentan skup formula, 28
Kripkeov model, 6
Kripkeov okvir, 4

lema o egzistenciji
    za sistem K, 30
lema o istinitosti, 31
Lindenbaumova lema, 29
logički ekvivalentne

modalne formule, 10
lokalna semantička posljedica, 9

maksimalno konzistentan skup, 29
modalno definabilna klasa okvira, 57
modalno ekvivalentni svjetovi, 13
modalno saturirani model, 46
model, 6
- m–saturirani, 46
- Kripkeov, 6
- modalno saturirani, 46
- slikovno konačan, 18

nepravi filter, 52
normalna modalna logika
- K, 27
- $K1.1$, 34
- $K4$, 32
- KD, 34
- $S4$, 34
- $S4.3$, 34
- $S5$, 36
- T, 33

oboriva formula, 7
oborivost formule na modelu, 7
ograničeni morfizam, 14
okvir, 4
- desno neograničen, 34
- euklidski, 11
- funkcijski, 11
- parcijalno funkcionalan, 11
- refleksivan, 10
- simetričan, 10
- tranzitivan, 10

podmodel, 13
- generiran skupom, 14
- generirani, 13
- točkovno generirani, 14

pravi filter, 44, 52
prebrojivo nepotpun ultrafilter, 44
prebrojivo saturirana struktura, 50

raspetljavanje, 15

relacija
- inverzno dobro fundirana, 11
- nema grananja u desno, 34
- slabo gusta, 11
- slabo usmjerena, 12

relacija dostiživosti, 4

skup formula
- inkonzistentan, 28
- ispunjiv na modela, 9
- istinit na svijetu modela, 9
- konzistentan, 28
- maksimalno konzistentan, 29
- valjan na klasi okvira, 9
- valjan na okviru, 9

slikovno konačan model, 18
standardna translacija, 37
stupanj formule, 4
svijet, 4

teorem
- adekvatnosti za sistem K, 27
- dedukcije za sistem K, 28
- Goldblatt–Thomasonov, 64
- Hennessy-Milnerov, 18
- o ultrafiltru, 53
- potpunosti za sistem K, 31
- van Benthemov, 39

točkovno generirani podmodel, 14

ultrafilter, 44
- prebrojivo nepotpun, 44

ultrafiltersko proširenje modela, 47
ultrapotencija, 45
ultraprodukt
- familije struktura, 45

uvjet da nema grananja u desno, 11

valjana formula, 8
valuacija, 6