Prva domaća zadaća

Rješenja

Zadatak 1. Volonterima na manifestaciji *Dan i noć na PMF-u* podijeljene su zelene, plave i ljubičaste majice. Ukupno ima 102 majice, zelenih ima λ više nego plavih, a kada bi bilo dvostruko više ljubičastih majica i trostruko više plavih, ukupan broj majica bio bi 174.

U ovisnosti o cjelobrojnom parametru λ odredite koliko je majica koje boje podijeljeno volonterima. Koliko najmanje, a koliko najviše može biti ljubičastih majica?

Rješenje. Označimo broj zelenih majica sa Z, plavih s P i ljubičastih sa LJ. Imamo sustav

$$\begin{cases} Z+P+LJ=102 \\ Z=P+\lambda \\ Z+3P+2LJ=174 \end{cases}$$

Sustav rješavamo Gaussovom metodom eliminacija:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 102 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 1 & 3 & 2 & 174 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 102+\lambda \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 4 & 0 & 2 & 174+3\lambda \end{array}\right) \cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 102+\lambda \\ 1 & -1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-30 \end{array}\right)$$

1°) Za $\lambda \neq 30$ imamo redak $(0\ \ 0\ \ 0 \mid c)$ gdje je $c \neq 0$, pa sustav nema rješenja.

2°) Za $\lambda = 30$ imamo nul-redak kojeg možemo ispustiti, pa je matrica sustava

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 132 \\ 1 & -1 & 0 & 30 \end{array}\right)$$

i rješenje je

$$Z=t, \qquad P=t-30, \qquad LJ=132-2t$$

pri čemu je t slobodni parametar. Kako Z, P i LJ moraju biti nenegativni cijeli brojevi (manji ili jednaki 102), t mora zadovoljavati

$$30 \le t \le 66.$$

Najmanji broj ljubičastih majica dobivamo za $t=66$ i on iznosi $LJ=0$, a najveći za $t=30$ i on iznosi $LJ=72$.

3 boda

Napomene:

- Potpuno rješenje zadatka mora sadržavati diskusiju o parametru λ. Nije dovoljno samo napisati $\lambda=30$ bez komentara da u suprotnom sustav nema rješenja.
- Priznaje se i rješenje koje pretpostavlja da postoji barem jedna majica svake boje, ali to je trebalo napraviti konzistentno: u tom slučaju je najmanji mogući broj ljubičastih majica $LJ=2$ (jer je $LJ=132-2t$, a t je cijeli broj), a najveći $LJ=70$ (jer mora biti barem jedna plava majica, pa je $t \ge 31$).

Zadatak 2. Izračunajte determinantu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 12 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 16 & 2 & 1 & 16 \end{vmatrix}$$

Rješenje. Najprije radimo elementarne transformacije:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 12 & 1 \\ 1 & 1 & 12 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 16 & 2 & 1 & 16 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}$$

Laplaceovim razvojem po prvom stupcu dobivamo

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 15 \end{vmatrix}$$

pa zatim razvojem po trećem retku

$$\begin{vmatrix} 8 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 15 & 0 & 15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 5 \\ 15 & 0 & 15 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 8 & 11 \\ 15 & 0 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 15 \end{vmatrix} = -5 \cdot (-165) + 8 \cdot 150 = 2025.$$

3 boda

Napomene:

- Priznaje se bilo koji valjani način računanja determinante.
- Konačno rješenje u svim grupama je 2025.

Zadatak 3. Linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojom matricom

$$[A]_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

s obzirom na bazu $f = \big(\underbrace{(3,0,1)}_{f_1}, \underbrace{(0,2,0)}_{f_2}, \underbrace{(1,0,1)}_{f_3}\big)$.

(a) Dokažite da je $f = (f_1, f_2, f_3)$ zaista baza prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi.

(c) Odredite spektar operatora A. Odredite svojstvene vektore pridružene cjelobrojnoj svojstvenoj vrijednosti od A.

Rješenje.

(a) Vektore f_1, f_2 i f_3 zapišemo u stupce matrice i računamo determinantu:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \neq 0.$$

Kako je determinanta matrice $\neq 0$, njeni stupci su linearno nezavisni i čine bazu za $\mathbb{R}^3$.

1 bod

(b) Znamo da je $[A]_f = T^{-1}[A]_e T$, pri čemu je T matrica prijelaza iz baze f u kanonsku bazu $e = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Stoga je $[A]_e = T[A]_f T^{-1}$. Odredimo inverz matrice T:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} |:2 \\ |:2 \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Dakle, $T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. Sada računamo

$$[A]_e = T[A]_f T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1,5 bodova

(c) Prvo odredimo svojstveni polinom operatora A. To će biti lakše ako uzmemo matricu u bazi f:

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2).$$

Nultočke svojstvenog polinoma su $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$, pa je spektar $\sigma(A) = \{1, \pm\sqrt{2}\}$. Jedina cjelobrojna ultočka je $\lambda = 1$. Odredimo pripadne svojstvene vektore: oni su rješenja sustava čija je proširena matrica

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-1 & 4 & -6 & 0 \\ -1 & 0-1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -2-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -6 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ \end{array} \cdot(\text{-}2)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \cdot(\text{-}2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Dakle, svojstveni vektori za $\lambda = 1$ su $\{(3t, 0, t) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$.

1,5 bodova

Napomene:

- Rješenja bez postupka (npr. traženje inverza matrice) nose maksimalno 3 boda.
- Kod određivanja svojstvenih vektora nužno je promatrati matrični prikaz u kanonskoj bazi; u suprotnom se dobiveni koeficijenti odnose na prikaz vektora u bazi f!
- Svojstvene vektore je moguće i pročitati direktno iz matrice $[A]_f$: vidimo da je $Af_1 = f_1$, tj. $f_1 = (3, 0, 1)$ je jedan svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 1$. Onda je i svaki njegov skalarni višekratnik također svojstveni vektor.