ELEMENTARNA GEOMETRIJA

drugi kolokvij - 9. veljače 2021.

Napomene: Vrijeme rješavanja je 150 minuta.
Nije dozvoljeno korištenje nikakvih pomagala osim geometrijskog pribora.

Prva četiri zadatka rješavajte na jednom listu papira, a ostale zadatke svaki na zasebnom listu. Obavezno napišite svoje ime, prezime i JMBAG na svaki list papira koji predate.

1. **(5 b)** Ne primjenjujući karakterizaciju tetivnih četverokuta, dokažite da je četverokut kojemu su dva nasuprotna kuta prava tetivan četverokut. Koristeći samo ravnalo i šestar, nacrtajte jedan takav četverokut koji nije pravokutnik (i opišite kako ste ga nacrtali).

2. **(5 b)**

   (a) Poznato je da je površina trokuta jednaka polovini umnoška duljine jedne njegove stranice i duljine visine na tu stranicu. Izvedite formulu za površinu trokuta izraženu pomoću duljina a i b njegovih stranica i trigonometrijske funkcije kuta γ.

   (b) Primjenjujući formulu dobivenu u (i), izvedite formulu za površinu trokuta izraženu pomoću duljina a, b, c njegovih stranica i duljine polumjera R njemu opisane kružnice. Koji ste teorem pritom koristili? Napišite tvrdnju tog teorema.

3. **(4 b)** Neka je f preslikavanje ravnine, a T točka u ravnini. Kažemo da je T fiksna točka preslikavanja f ako je $f(T) = T$. Navedite (ako postoje) sve fiksne točke preslikavanja f ako je f:

   (a) centralna simetrija obzirom na točku O,

   (b) osna simetrija obzirom na pravac p,

   (c) translacija za vektor $\vec{a}$ različit od nulvektora,

   (d) rotacija sa središtem O za kut $\alpha \neq 0$.

4. **(3 b)** Definirajte sljedeće pojmove:

   (a) okomitost pravca na ravninu,

   (b) okomitost jedne ravnine na drugu,

   (c) pravilan konveksni poliedar.

5. (7 b) Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B. Pravac a prolazi kroz točku A siječe k_1 u točki A_1, a k_2 u točki A_2, dok pravac b prolazi kroz točku B, siječe k_1 u točki B_1, a k_2 u točki B_2. Dokažite da su pravci A_1B_1 i A_2B_2 međusobno paralelni.

6. (7 b) Neka je $ABCD$ četverokut kojemu su duljine stranica

$$|AB| = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad |BC| = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \quad |CD| = \sqrt{2}, \quad |DA| = 1.$$

Ako središte opisane kružnice trokuta ACD leži na dužini $\overline{CD}$, odredite duljinu dijagonale $\overline{BD}$.

7. (7 b) Neka je $ABCD$ paralelogram, a P i Q polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ redom. Dužine $\overline{AQ}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CP}$ i $\overline{DP}$ sijeku dijagonale danog paralelograma ($\overline{AC}$ ili $\overline{BD}$) redom u točkama K, L, M i N. Dokažite da postoji homotetija koja preslikava paralelogram $ABCD$ u četverokut $KLMN$ i odredite koeficijent te homotetije.

8. (7 b) Dana je kocka $ABCDA_1B_1C_1D_1$ brida duljine a. Neka je M polovište brida $\overline{AA_1}$, a N točka na dužini $\overline{A_1D_1}$, takva da je $|A_1N| : |ND_1| = 1 : 2$. Odredite presjek dane kocke ravninom koja prolazi točkama M, N i C_1. Skicirajte taj presjek i odredite duljine svih stranica dobivenog mnogokuta.

9. (7 b) - bonus zadatak
U ravnini su dane točke O, A i A'. Promatramo tri preslikavanja u toj ravnini:

- r – rotacija oko točke O za koju je $r(A) = A'$,
- t_1 – translacija za koju je $t_1(O) = A$,
- t_2 – translacija za koju je $t_2(O) = A'$.

Dokažite da vrijedi $r \circ t_1 = t_2 \circ r$.

Uputa: U dokazu možete koristiti činjenicu da svaka izometrija preslikava paralelogram u njemu sukladan paralelogram.