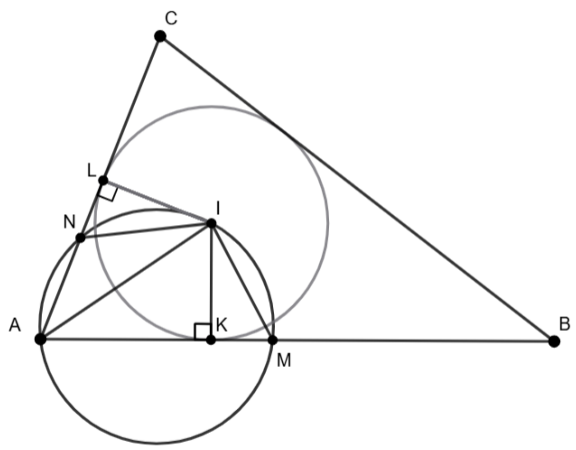
ELEMENTARNA GEOMETRIJA

Skice rješenja pismenog ispita - 26. kolovoza 2025.

1. Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC, a K i L redom dirališta te kružnice sa stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Kružnica k prolazi točkama A i I te siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ redom u nekim točkama M i N. Dokažite da su trokuti KMI i LNI sukladni.

   Rješenje.
   Pretpostavimo da je sjecište N na dužini $\overline{AL}$.

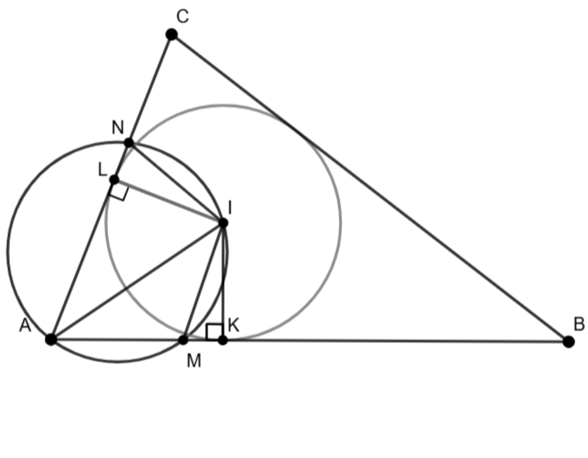


Uočimo prvo da je $|IL| = |IK|$ te $\sphericalangle ALI = \sphericalangle AKI = 90°$. Kako je četverokut $ANIM$ tetivan po konstrukciji, nasuprotni kutovi su mu suplementarni:

$$\sphericalangle ANI = 180° - \sphericalangle AMI.$$

Budući da je $\sphericalangle LNI = 180° - \sphericalangle ANI$, zaključujemo $\sphericalangle LNI = \sphericalangle AMI$. Po KSK poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da su trokuti KMI i LNI sukladni.

Analogno zaključujemo i ako N nije na dužini $\overline{AL}$, budući da je sada M na dužini $\overline{AK}$.

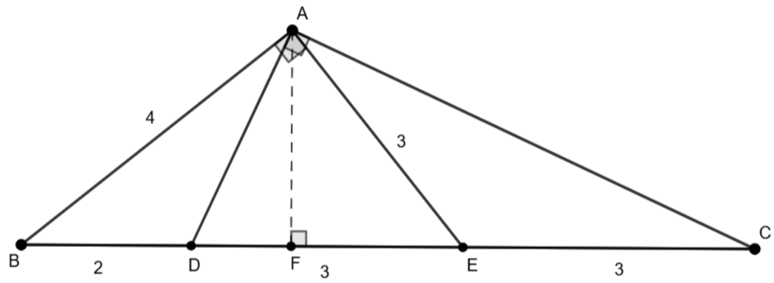


2. Na stranici $\overline{BC}$ trokuta ABC odabrane su točke D i E tako da vrijedi

$$\sphericalangle BAE = \sphericalangle DAC = 90^\circ, \quad |BD| = 2, \quad |DE| = 3, \quad |EC| = 3.$$

Izračunajte površinu trokuta ABC.

Rješenje.



Budući da je E polovište hipotenuze pravokutnog trokuta $\triangle ADC$, to je i središte kružnice opisane tom trokutu pa je također $|AE| = 3$. Sada promatramo pravokutan trokut $\triangle ABE$ čija je hipotenuza duljine 5 i jedna kateta duljine 3 pa primjenom Pitagorinog poučka dobivamo

$$|AB| = \sqrt{|BE|^2 - |AE|^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

Površina tog trokuta jednaka je $P_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}|AB||AE| = 6$. S druge strane, površinu možemo dobiti i kao $P_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}|BE||AF|$, pri čemu je F nožište visine iz vrha A na BE. Uvrštavanjem dobivamo $|AF| = \frac{12}{5}$.

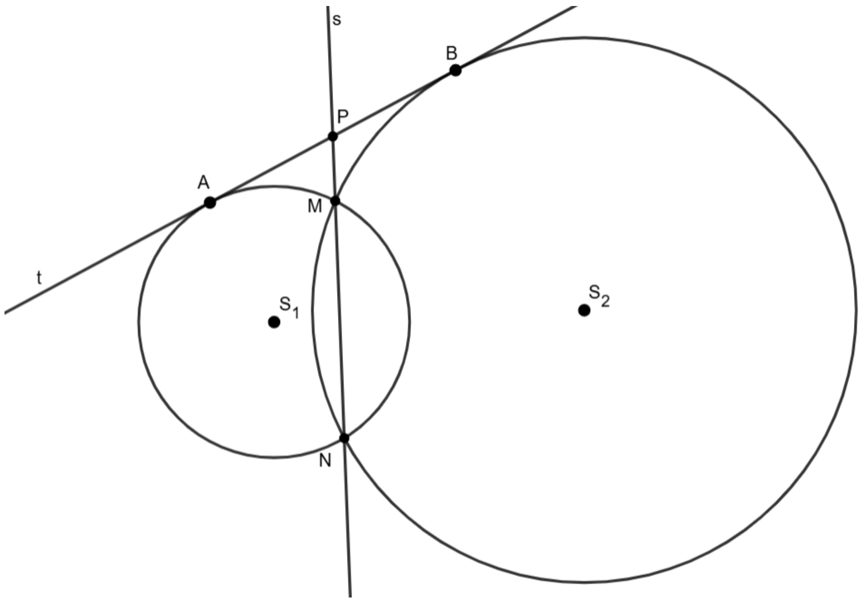
Uočimo da je $\overline{AF}$ ujedno i visina trokuta $\triangle ABC$, što znači da možemo izračunati njegovu površinu kao

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|BC||AF| = \frac{1}{2} \cdot (2+3+3) \cdot \frac{12}{5} = \frac{48}{5}.$$

Napomena. Površinu smo mogli izračunati i pomoću Heronove formule, za što nam treba i duljina stranice $\overline{AC}$, a u računu smo mogli koristiti i trigonometrijske funkcije. Oboje bi produljilo sami račun.

3. Dvije kružnice različitih polumjera se sijeku. Dokažite da njihova zajednička sekanta (pravac koji sadrži zajedničku tetivu) raspolavlja odsječak zajedničke tangente između dvaju dirališta.

Rješenje.
Neka su M i N sjecišta kružnica, MN zajednička sekanta kružnica, A i B dirališta kružnica sa zajedničkom tangentom te neka je P sjecište zajedničke sekante i tangente. Želimo dokazati $|PA| = |PB|$.



Promatramo potenciju točke P s obzirom na zadane kružnice:

$$|PA|^2 = |PM||PN|$$
$$|PB|^2 = |PM||PN|.$$

Izjednačimo gornje relacije da dobijemo $|PA|^2 = |PB|^2$, odnosno $|PA| = |PB|$.

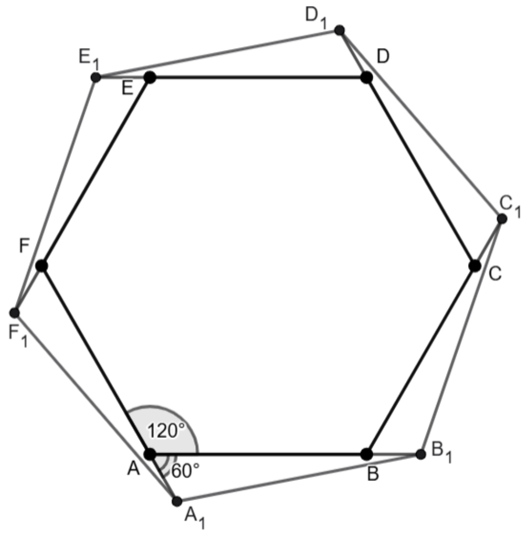
Napomena. Mogli smo promatrati i odgovarajuće sličnosti koje bi nas u konačnici zapravo ponovno dovele do potencije točke. Konkretno, $\triangle PAN \sim \triangle PMA$ i $\triangle PBN \sim \triangle PMB$, što dobivamo primjerice pomoću teorema o kutu između tangente i tetive te poučka KK o sličnosti trokuta.

4. Površina pravilnog šesterokuta $ABCDEF$ iznosi $24\sqrt{3}$. Ako svaku stranicu tog šesterokuta produljimo za dužinu duljine 1, i to $\overline{AB}$ preko vrha B, $\overline{BC}$ preko vrha C itd., dobit ćemo šest točaka koje su vrhovi novog šesterokuta. Koliki je njegov opseg?

Rješenje.
Površina pravilnog šesterokuta jednaka je šesterostrukoj površini karakterističnog trokuta koji je u ovom slučaju jednakostraničan:

$$P_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3} \implies a = 4.$$

Neka je A_1 "produžetak" stranice $\overline{FA}$ preko vrha A te B_1 "produžetak" stranice $\overline{AB}$ preko vrha B.



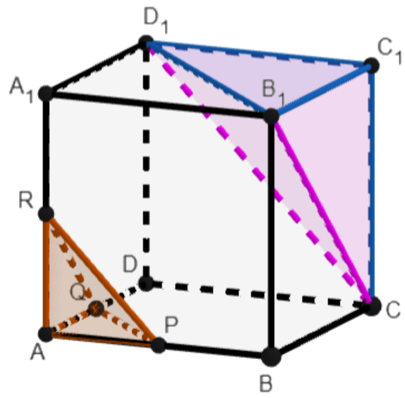
Vrijedi $\sphericalangle A_1AB_1 = 180° - \sphericalangle B_1AF = 60°$. Koristeći kosinusov poučak možemo izračunati

$$|A_1B_1| = \sqrt{|AA_1|^2 + |AB_1|^2 - 2|AA_1||AB_1| \cos A_1AB_1} = \sqrt{1^2 + 5^2 - 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{21}.$$

Zbog simetrije dobiveni šesterokut je ponovno pravilan te smo izračunali da je duljina njegove stranice jednaka $\sqrt{21}$, odnosno opseg mu je $6\sqrt{21}$.

5. Neka je $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka i neka su P, Q, R redom polovišta bridova $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ i $\overline{AA_1}$. Ravninama PQR i B_1CD_1 kocka je podijeljena na tri poliedra. Odredite u kojem su omjeru volumeni tih triju poliedara.

Rješenje. Neka je a duljina stranice kocke. Ravninama je kocka podijeljena na tetraedre $APQR$ i $C_1B_1CD_1$ te nepravilno tijelo (ostatak).



Tetraedar $C_1B_1CD_1$ možemo promatrati kao tetraedar čija je baza pravokutan trokut $\triangle B_1C_1D_1$, a visina brid kocke $\overline{CC_1}$. Budući da je $|B_1C_1| = |D_1C_1| = |CC_1| = a$, dobivamo

$$V_{C_1B_1CD_1} = \frac{1}{3}P_{\triangle B_1C_1D_1} \cdot |CC_1| = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}|B_1C_1| \cdot |D_1C_1|\right) \cdot |CC_1| = \frac{a^3}{6}.$$

Slično radimo i za tetraedar $APQR$, duljine stranica njegove baze i visina su $|AP| = |AQ| = |AR| = \frac{a}{2}$ pa imamo

$$V_{APQR} = \frac{1}{3}P_{\triangle APQ} \cdot |AR| = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}|AP| \cdot |AQ|\right) \cdot |AR| = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{a}{2} = \frac{a^3}{48}.$$

Volumen preostalog poliedra V_3 možemo dobiti kao razliku volumena cijele kocke i izračunatih volumena tetraedara

$$V_3 = V_{\text{kocke}} - V_{C_1B_1CD_1} - V_{APQR} = a^3 - \frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{48} = \frac{39a^3}{48}.$$

Dakle, traženi omjer je $V_{C_1B_1CD_1} : V_{APQR} : V_3 = 8 : 1 : 39$.

Napomena. Oba tetraedra mogli smo promatrati kao tetraedre čija je baza jednakostraničan trokut ($\triangle B_1CD_1$ duljine stranice $a\sqrt{2}$ i $\triangle PQR$ duljine stranice $\frac{a\sqrt{2}}{2}$). Visinu na bazu možemo izračunati koristeći visinu trokuta koji čini bazu, omjer u kojem težište dijeli težišnicu te Pitagorin poučak. Kao međurješenja dobivamo sljedeće (C_1' i A' su nožišta visina iz C_1 i A na odgovarajuće baze):

$$P_{B_1CD_1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}, \qquad |C_1C_1'| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$P_{PQR} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}, \qquad |AA'| = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$