

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

prvi jesenski rok – 28. kolovoza 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje. Svaki zadatak vrijedi 20 bodova.

Zadatak 1. Zadana je tvrdnja:

Bilo koji podskup od $\mathbb{N}$ takav da svaki prirodan broj veći od 1 ima djelitelj u tom skupu sadrži 1 kao element.

- (a) Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, obrat po kontrapoziciji i negaciju.
- (b) Za svaku od četiri zapisane tvrdnje odredite je li istinita. Obrazložite.

Zadatak 2. Neka je ρ relacija na $\mathbb{N}$ definirana s

$$a \rho b \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}_0) b = 2^k a.$$

- (a) Dokažite da je ρ relacija parcijalnog uređaja. Je li totalan uređaj?
- (b) Odredite, ako postoje, sve gornje međe (u odnosu na uređaj ρ) skupa $\{3, 6\}$.
- (c) Dokažite: ako skup $S \subseteq \mathbb{N}$ ima gornju među (u odnosu na uređaj ρ), onda ima i supremum (u odnosu na uređaj ρ).

Zadatak 3.

- (a) Dokažite da za sve pozitivne realne brojeve a, b, c, d vrijedi

$$\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{d} \geq \frac{(a+c)^2}{b+d}.$$

- (b) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ i za bilo kojih $2n$ pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ vrijedi

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Zadatak 4. Odredite ostatak pri dijeljenju broja $11^{67^{33}}$ brojem 128.

Zadatak 5.

- (a) Neka je $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinom stupnja $d > 0$. Dokažite da je $f(x+1) - f(x)$ polinom stupnja $d-1$.
- (b) Odredite sve polinome $f \in \mathbb{R}[x]$ takve da je $f(0) = 0$ i $f(x+1) - f(x) = x^2$.