

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

prvi zimski rok – 4. veljače 2026.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (25 bodova)

- (a) (15 bodova) Neka su A , B i C skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$(A \cap B) \cup (B \setminus C) \quad \text{i} \quad B \setminus (A \triangle C).$$

Svoje tvrdnje dokažite, odnosno opovrgnite kontraprimjerom.

- (b) (10 bodova) Na skupu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ zadana je relacija ρ s

$$(a, b) \rho (c, d) \iff ad \neq bc.$$

Odredite, uz obrazloženje, je li ρ refleksivna, tranzitivna, simetrična, antisimetrična, irefleksivna.

Zadatak 2. (25 bodova) Za $n \in \mathbb{N}$ želimo particionirati skup $\{1, 2, \dots, n\}$ na dva skupa A i B takva da je zbroj svih elemenata u A jednak zbroju svih elemenata u B .

- (a) (10 bodova) Ako takva particija postoji, dokažite da je nužno $n = 4k$ ili $n = 4k - 1$ za neki $k \in \mathbb{N}$.
- (b) (15 bodova) Dokažite matematičkom indukcijom da su uvjeti iz (a) i dovoljni da bi takva particija postojala.

Zadatak 3. (25 bodova)

- (a) (12 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju broja

$$123^{456}$$

brojem 11.

- (a) (13 bodova) Dokažite da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je

$$2 \cdot 3^n + 16 = 123^{456} + 11^m.$$

Zadatak 4. (25 bodova) Neka je $f(x) = x^6 - 2x^5 + 7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 32x - 16$.

- (a) (13 bodova) Odredite sve nultočke polinoma f ako je poznato da je $\alpha = 2i$ njegova dvostruka nultočka.
- (b) (12 bodova) Dokažite da ne postoji polinom g stupnja 3 takav da su sve nultočke polinoma $f + g$ realne. (Uputa: iskoristite Viéteove formule)