

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

drugi zimski rok – 18. veljače 2026.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (25 bodova)

- (a) (10 bodova) Neka su A i B skupovi. Dokažite da su skupovi A i B disjunktni ako i samo ako vrijedi $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$.
- (b) (15 bodova) Neka je $a_1 = 2$. Za prirodan broj $n > 1$, definiramo broj a_n kao zbroj prvih a_{n-1} prirodnih brojeva. Dokažite da vrijedi $a_n > n!$ za svaki $n > 4$.

Zadatak 2. (25 bodova) Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ neki skup. Na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zadana je relacija ρ sa:

$$A \rho B \iff (\forall a \in A)(a \notin B \Rightarrow a \in S).$$

- (a) (15 bodova) Ispitajte svojstva relacije ρ (refleksivnost, irefleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost) u slučaju kad je S skup parnih brojeva.
- (b) (10 bodova) Navedite primjer skupa S za koji je relacija ρ
 - (b1) simetrična;
 - (b2) antisimetrična.

Obrazložite svoj odgovor.

Zadatak 3. (25 bodova)

- (a) (15 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju broja

$$109^{2025^{2026}} - 55^{2025^{2026}}$$

s 26.

- (b) (10 bodova) Odredite sve prirodne brojeve n takve da je $n!$ djeljiv s n^2 .

Zadatak 4. (25 bodova) Polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ pri dijeljenju s $x + 1$ daje ostatak 2, pri dijeljenju s x daje ostatak 4, pri dijeljenju s $x - 1$ daje ostatak 8 i pri dijeljenju s $x - 2$ daje ostatak 16.

- (a) (10 bodova) Dokažite da polinom f ne može imati sve cjelobrojne koeficijente.
- (b) (15 bodova) Ako je

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

odredite koeficijente a , b , c i d .