

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

drugi jesenski rok – 10. rujna 2026.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (15+10=25 bodova)

(a) Zadana je tvrdnja:

*Svaki podskup skupa prirodnih brojeva kojemu su svi elementi
djeljivi s 2 ili 4 ne sadrži neparan broj.*

Zapišite simbolima zadanu tvrdnju te njen obrat, obrat po kontrapoziciji i negaciju. Za svaku od četiri tvrdnje odredite je li istinita.

(b) Matematičkom indukcijom dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Zadatak 2. (15+5+5=25 bodova) Neka je $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Na skupu $\mathcal{P}(S)$ zadana je relacija $\sim$ s

$$A \sim B \Leftrightarrow A \Delta B \subseteq \{1, 2\}.$$

- (a) Dokažite da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Je li relacija parcijalnog uređaja? (Napomena: dokažite sve skupovne inkluzije koje koristite.)
- (b) Odredite klasu ekvivalencije elementa $\{1, 3, 4\}$.
- (c) Koliko elemenata ima kvocijentni skup $\mathcal{P}(S)/\sim$?

Zadatak 3. (15+10=25 bodova)

- (a) Dokažite da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva oblika $3m+2$, $m \in \mathbb{N}$.
- (b) Neka su n i m prirodni brojevi takvi da je $37n = 12m$. Dokažite da je broj $n+m$ djeljiv s 49.

Zadatak 4. (15+10=25 bodova)

(a) Odredite sve parametre $a, b \in \mathbb{R}$ takve da polinom

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + ax + b$$

ima jednu dvostruku nultočku, a preostale dvije nultočke su suprotni brojevi. Odredite sve nultočke u tom slučaju.

(b) Odredite oblik rastava na parcijalne razlomke racionalne funkcije

$$\frac{1}{(x^3 + x - 10)^2}.$$

Nije potrebno računati konstante u brojnicima.