

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

prvi kolokvij – 26. studenog 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (10 bodova)

- (a) (6 bodova) Zapišite simbolima tvrdnju

Za svaki prirodan broj veći od 30, postoji realan broj koji je veći od njega i manji od 100 ili manji od njega i veći od 100.

i njenu negaciju. Odredite istinitost svake od tvrdnji.

- (b) (4 boda) Odredite neki sud F za koji je sud

$$(A \Leftrightarrow \neg B) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge \neg F)$$

tautologija. Obrazložite svoj odgovor.

Zadatak 2. (12 bodova) Neka su A , B , C i D skupovi.

- (a) (8 bodova) Ispitajte odnos skupova

$$(A \times C) \triangle (B \times D) \quad \text{ i } \quad ((A \setminus B) \times C) \cup (B \times (D \setminus C)).$$

Svoje tvrdnje dokažite, odnosno opovrgnite kontraprimjerima.

- (b) (4 boda) Dokažite da je $A \setminus B = \emptyset$ ako i samo ako je $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) = \emptyset$.

Zadatak 3. (16 bodova)

- (a) (10 bodova) Na skupu $\mathbb{N}$ zadana je relacija ρ definirana s

$$a \rho b \iff a + 2b \text{ je djeljiv s } 3.$$

(a1) Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije. Je li antisimetrična?

(a2) Odredite klasu ekvivalencije elementa 2025.

- (b) (6 bodova) Pronađite primjer relacije parcijalnog uređaja na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ koja sadrži točno 13 elemenata i s obzirom na koju skup $\{1, 4\}$ nema nijednu gornju među. Nije potrebno obrazlagati svoj odgovor.

Zadatak 4. (12 bodova)

- (a) (6 bodova) Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi $\sqrt[n]{2+n} \leq 2$.

- (b) (6 bodova) Neka je $a_1 = 1$ i za svaki prirodan broj $n \geq 1$ definiramo $a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n + n}$. Dokažite da je $a_n \leq 2$ za svaki prirodan broj n .

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

prvi kolokvij – 26. studenog 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (10 bodova)

- (a) (6 bodova) Zapišite simbolima tvrdnju

Za svaki prirodan broj veći od 40, postoji realan broj koji je veći od njega i manji od 90 ili manji od njega i veći od 90.

i njenu negaciju. Odredite istinitost svake od tvrdnji.

- (b) (4 boda) Odredite neki sud F za koji je sud

$$(\neg A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge \neg F)$$

tautologija. Obrazložite svoj odgovor.

Zadatak 2. (12 bodova) Neka su A , B , C i D skupovi.

- (a) (8 bodova) Ispitajte odnos skupova

$$(A \times C) \triangle (B \times D) \quad \text{ i } \quad (A \times (C \setminus D)) \cup ((B \setminus A) \times D).$$

Svoje tvrdnje dokažite, odnosno opovrgnite kontraprimjerima.

- (b) (4 boda) Dokažite da je $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) = \emptyset$ ako i samo ako je $A \setminus B = \emptyset$.

Zadatak 3. (16 bodova)

- (a) (10 bodova) Na skupu $\mathbb{N}$ zadana je relacija ρ definirana s

$$a \rho b \iff 2a + b \text{ je djeljiv s } 3.$$

(a1) Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije. Je li antisimetrična?

(a2) Odredite klasu ekvivalencije elementa 2025.

- (b) (6 bodova) Pronađite primjer relacije parcijalnog uređaja na skupu $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ koja sadrži točno 13 elemenata i s obzirom na koju skup $\{2, 5\}$ nema nijednu gornju među. Nije potrebno obrazlagati svoj odgovor.

Zadatak 4. (12 bodova)

- (a) (6 bodova) Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geq 2$ vrijedi $\sqrt[n]{n+2} \leq 2$.

- (b) (6 bodova) Neka je $b_1 = 1$ i za svaki prirodan broj $n \geq 1$ definiramo $b_{n+1} = \sqrt[n]{n+b_n}$. Dokažite da je $b_n \leq 2$ za svaki prirodan broj n .