

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

drugi kolokvij – 4. veljače 2026.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (13 bodova)

- (a) (6 bodova) Odredite ostatak pri dijeljenju broja

$$123^{45^6}$$

brojem 11.

- (b) (7 bodova) Dokažite da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je

$$2 \cdot 3^n + 16 = 123^{45^6} + 11^m.$$

Zadatak 2. (12 bodova)

- (a) (6 bodova) Neka je n prirodan broj. Odredite koje sve vrijednosti može poprimiti

$$M(16n + 81, 12n + 63).$$

- (b) (6 bodova) Odredite $\varphi^n(6^{100}) = \underbrace{\varphi(\varphi(\dots(\varphi(6^{100}))\dots))}_{n \text{ primjena funkcije } \varphi}$ za $n = 90$ i za $n = 110$.

Zadatak 3. (13 bodova) Neka je $f(x) = x^6 - 2x^5 + 7x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 32x - 16$.

- (a) (7 bodova) Odredite sve nultočke polinoma f ako je poznato da je $\alpha = 2i$ njegova dvostruka nultočka.
- (b) (6 bodova) Dokažite da ne postoji polinom g stupnja 3 takav da su sve nultočke polinoma $f + g$ realne. (Uputa: iskoristite Viéteove formule)

Zadatak 4. (12 bodova)

- (a) (8 bodova) Odredite sve polinome $f \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju

$$x^2 f(x - 1) = (x - 1)(x - 3)f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- (b) (4 bodova) Odredite oblik rastava na parcijalne razlomke racionalne funkcije

$$\frac{1}{x(x - 2)^3(x^2 + x + 1)^2}.$$

Nije potrebno računati konstante u brojnicima.