

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

prvi jesenski rok – 28. kolovoza 2026.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (25 bodova)

- (a) (10 bodova) Neka su A, B, C, D skupovi. Ispitajte odnos skupova

$$((A \cup B) \times (C \cap D)) \cup ((A \cap B) \times (C \cup D)) \quad \text{i} \quad ((A \cap B) \times C) \cup (A \times (C \cap D)).$$

- (b) (15 bodova) Neka su A i B podskupovi od $\mathbb{N}$. Dokažite:

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall C \subseteq \mathbb{N})(C \neq \emptyset \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C).$$

Zadatak 2. (25 bodova) Na skupu polinoma $\mathbb{R}[x]$ zadana je relacija ρ sa

$$f \rho g \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists k \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(x \geq k \Rightarrow f(x) \leq g(x)).$$

- (a) (15 bodova) Dokažite da je ρ relacija parcijalnog uređaja. Je li relacija ekvivalencije?
- (b) (10 bodova) Ima li skup svih konstantnih polinoma gornju među s obzirom na uređaj ρ ?
Ima li supremum?

Zadatak 3. (25 bodova)

- (a) (15 bodova) Odredite sve prirodne brojeve n za koje je zbroj $4^n + 5^n + 6^n$ djeljiv s 45.
- (b) (10 bodova) Dokažite da ne postoje prirodni brojevi n, m takvi da vrijedi

$$4^n + 5^n + 6^n = 15n^m + 12.$$

Zadatak 4. (25 bodova) Zadani su polinomi

$$f(x) = x^5 + x^4 - ax^3 - (b+6)x^2 + (4a+b-12)x + (3a+2b-6)$$

$$\text{i} \quad g(x) = (x+1)^2(x-2)(x-a).$$

- (a) (15 bodova) Odredite sve parametre $a, b \in \mathbb{R}$ tako da najveća zajednička mjera od f i g ima dvostruku nultčku.
- (b) (10 bodova) Odredite sve parametre $a \in \mathbb{R}$ takve da polinom g pri dijeljenju s $x+a$ daje ostatak $a(1-a)$.