2 Skupovi

Definicija. Neka su A i B skupovi. Kažemo da je A *podskup* od B i pišemo $A \subseteq B$ ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B. Simbolima to zapisujemo ovako:

$$A \subseteq B \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Definicija. Kažemo da su skupovi A i B *jednaki* i pišemo $A = B$ ako vrijedi $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

Zadatak 1. Ispišite sve podskupove skupa $\{1, 2, 3\}$.

Definicija. Skup svih podskupova skupa S zovemo *partitivni skup* od S i označavamo ga s $\mathcal{P}(S)$.

Prazan skup je podskup svakog skupa, tj. za svaki skup A vrijedi $(\forall x)(x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$.

Zadatak 2. Ako skup S ima n elemenata, koliko elemenata ima skup $\mathcal{P}(S)$?

Zadatak 3. Dokažite: ako je $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$, onda je $A = B$.

Operacije na skupovima

- unija skupova, $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- presjek skupova, $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- skupovna razlika, $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- komplement skupa u univerzalnom skupu U, $A^c := \{x \in U \mid x \notin A\}$.

Zadatak 4. Neka je $S = \{1, 2, \ldots, 10\}$ univerzalni skup i neka su dani njegovi podskupovi $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ i $C = \{2, 3, 5, 7\}$. Nacrtajte Vennov dijagram i odredite $A \cup B$, $B \cap C$, $A \setminus C$, $C \setminus A$, $C \cap A^c$, $(A \cup B)^c$, $(A \setminus B)^c$, $C \setminus (A \cup B)$, $A \cup B \cup C$ i $A \cap B \cap C$.

Zadatak 5. Neka je S univerzalni skup i A, $B \subseteq S$. Dokažite da je $A \setminus B = A \cap B^c$.

Zadatak 6. Neka je S univerzalni skup i A, $B \subseteq S$. Prikažite $A \cap B$ i $A \setminus B$ koristeći samo uniju i komplementiranje.

Zadatak 7. Postoji li $A \subseteq \mathbb{N}$ sa svojstvom:

(a) A je konačan, A^c je beskonačan?

(b) A^c je beskonačan, A^c je konačan?

(c) A i A^c su oba beskonačni?

(d) A i A^c su oba konačni?

Definicija. Za skupove A i B kažemo da su *disjunktni* ako nemaju zajedničkih elemenata, tj. ako je $A \cap B = \emptyset$.

Zadatak 8. Neka su A, B podskupovi univerzalnog skupa S. Dokažite: A i B su disjunktni ako i samo ako je $A \subseteq B^c$.

Definicija. *Particija skupa* S je skup međusobno disjunktnih nepraznih podskupova od S koji u uniji daju cijeli S. Dakle, particija skupa S je svaki skup oblika $\mathcal{F} = \{S_i \mid i \in I\}$ sa svojstvima

(i) $(\forall i \in I)\, S_i \subseteq S$

(ii) $(\forall i \in I)\, S_i \neq \emptyset$

(iii) $(\forall i \in I)(i \neq j \Rightarrow S_i \cap S_j = \emptyset)$

(iv) $\cup_{i \in I} S_i = S$.

Zadatak 9. Odredite sve particije skupa $\{1, 2, 3\}$.

Zadatak 10. Koliko ima particija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ na dva skupa?

Zadatak DZ. Koliko ima particija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ na tri skupa?

Zadatak 11. Dokažite: $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$ ako i samo ako $A \cup B \subseteq C$.

Napomena. Svojstvo $A \subseteq B$ i $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ zove se *tranzitivnost* relacije $\subseteq$.

Zadatak 12. Dokažite da vrijedi: $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Napomena. U prethodnom zadatku smo upotrijebili $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$.

Zadatak 13. Dokažite da vrijedi: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

Napomena. Kad imamo uniju (odnosno presjek) više skupova, možemo izostaviti zagrade.

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) =: A \cup B \cup C$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) =: A \cap B \cap C$$

To se svojstvo zove *asocijativnost*. Za razliku od unije i presjeka, skupovna razlika nije asocijativna. Nadalje, presjek i unija su *komutativne* operacije, a skupovna razlika nije, tj. vrijedi

$$A \cup B = B \cup A \quad \text{i} \quad A \cap B = B \cap A,$$

ali $A \setminus B$ općenito nije jednako $B \setminus A$.

Zadatak 14. Ispitajte vrijedi li $(A \setminus B) \cup C) = (A \cup C) \setminus B$. Sve svoje tvrdnje dokažite.

Napomena. Vrijedi *distributivnost presjeka prema uniji*

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

i *distributivnost unije prema presjeku*

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Zadatak 15. Za proizvoljne skupove A, B, C, D neka je

$$S = (A \setminus B) \cup (C \setminus D), \quad T = (A \cup C) \setminus (B \cup D).$$

Ispitajte vrijede li općenito inkluzije $S \subseteq T$ i $T \subseteq S$. Sve svoje tvrdnje dokažite.

Definicija. *Kartezijev produkt skupova* A i B je skup

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Primjer. Za $A = \{x, y\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$ je $A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$.

Zadatak 16. Odredite i skicirajte u ravnini skup $A \times B$ ako je

(a) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$

(b) $A = \{1, 2\}$, $B = [1, 2]$

(c) $A = \langle 1, 2]$, $B = [1, 2\rangle$

(d) $A = [0, 1] \cup \{2\}$, $B = \{0\} \cup [1, 2]$.

Napomena. *Otvoreni interval* od a do b je

$$\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Zatvoreni interval od a do b je

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Poluotvoreni (poluzatvoreni) intervali su

$$\langle a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Zadatak 17. Je li kartezijev produkt skupova komutativna operacija? Je li asocijativna?

Zadatak 18. Dokažite da je $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

To svojstvo je distributivnost kartezijevog produkta prema uniji. Vrijede i distributivnosti kartezijevog produkta prema presjeku i prema skupovnoj razlici. (Dokažite sami.)

Definicija. Neka su A i B neprazni skupovi. *Relacija na skupovima* A i B je podskup kartezijevog produkta $A \times B$.

Primjeri relacija u matematici. $<$ na $\mathbb{R}$, $\leq$ na $\mathbb{Q}$, paralelnost pravaca u ravnini, okomitost pravaca u prostoru, $\subseteq$ na $\mathcal{P}(S)$, djeljivost u $\mathbb{Z}$. To su sve primjeri binarnih relacija.

Definicija. Relacija $\rho \subseteq A \times A$ zove se *binarna relacija na skupu* A.

Definicija. Neka je ρ binarna relacija na skupu A. Kažemo da je ρ

(i) *refleksivna* ako $(\forall a \in A)(a \,\rho\, a)$

(ii) *simetrična* ako $(\forall a, b \in A)(a \,\rho\, b \Rightarrow b \,\rho\, a)$

(iii) *tranzitivna* ako $(\forall a, b, c \in A)(a \,\rho\, b \wedge b \,\rho\, c \Rightarrow a \,\rho\, c)$

(iv) *antisimetrična* ako $(\forall a, b \in A)(a \,\rho\, b \wedge b \,\rho\, a \Rightarrow a = b)$.

Zadatak 19. Ispitajte svojstva sljedećih relacija:

(a) paralelnost pravaca u ravnini

(b) okomitost pravaca u ravnini

(c) $\leq$ na $\mathbb{N}$

(d) $<$ na $\mathbb{R}$

(e) $\subseteq$ na $\mathcal{P}(S)$.

Definicija. *Relacija ekvivalencije* je binarna relacija koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Definicija. *Parcijalni uređaj* je binarna relacija koja je refleksivna, antisimetrična i tranzitivna.

U prethodnom zadatku paralelnost je relacija ekvivalencije, a $\leq$ i $\subseteq$ su parcijalni uređaji.

Zadatak DZ. Dana je binarna relacija $\rho = \{(1,1),(1,3),(2,3),(2,2),(3,3)\}$ na skupu $\{1,2,3\}$. Ispitajte joj svojstva i odredite je li ona relacija ekvivalencije i je li parcijalni uređaj.

Zadatak 20. Na skupu $\{1,2,3,4\}$ dana je binarna relacija

$$\rho = \{(1,2),(2,3),(3,4),(1,3),(2,4),(4,4),(1,4)\}.$$

Odredite je li relacija ρ refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna.

Zadatak 21. Na skupu $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva definirana je relacija ρ sa

$$m\,\rho\,n \Leftrightarrow 3m \text{ i } 5n \text{ daju isti ostatak pri dijeljenju sa } 7.$$

Ispitajte je li relacija ρ refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna. Sve svoje tvrdnje dokažite.

Zadatak 22. Na skupu studenata prve godine definirana je relacija EM. Za dva studenta A i B vrijedi $(A,B) \in EM$ ako i samo ako niti jedan od njih nije položio ispit iz Elementarne matematike ili su obojica položila ispit s istom ocjenom ili je A položio ispit, a B nije. Koja svojstva uvijek ima relacija EM, bez obzira na situaciju na prvoj godini?

Definicija. *Suprotna relacija* relaciji ρ je relacija

$$\rho^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in \rho\}.$$

Zadatak 23. Dokažite sljedeće tvrdnje za svaku relaciju ρ na skupu A.

(a) $\rho = \rho^{-1} \Leftrightarrow \rho$ je simetrična

(b) ρ je tranzitivna $\Leftrightarrow \rho^{-1}$ je tranzitivna

(c) ρ je antisimetrična $\Leftrightarrow \rho \cap \rho^{-1} \subseteq \{(x,x) \mid x \in A\}$.

Definicija. Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu S i neka je $x \in S$. Skup

$$[x] := \{y \in S \mid x \sim y\}$$

zove se *klasa ekvivalencije* određena elementom x.

Zadatak 24. Neka su $[x]$ i $[y]$ dvije klase ekvivalencije relacije $\sim$ na skupu S. Dokažite: ako je $x \sim y$, onda je $[x] = [y]$, a ako je $x \not\sim y$, onda je $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Relacija ekvivalencije na skupu S određuje particiju skupa S (na klase ekvivalencije). Obratno, svaka particija $\mathcal{F} = \{S_i \mid i \in I\}$ skupa S određuje relaciju $\sim$ na sljedeći način:

$$x \sim y \iff (\exists i \in I)(x, y \in S_i).$$

Dokažite da je ovako definirana relacija $\sim$ relacija ekvivalencije čije su klase ekvivalencije skupovi S_i, $i \in I$.

Zadatak 25. Na skupu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ zadana je binarna relacija

$$\rho = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (1,3), (3,1), (4,5), (5,4)\}.$$

Dokažite da je ρ relacija ekvivalencije i odredite joj klase ekvivalencije.

Zadatak 26. Definirajte relaciju ekvivalencije na skupu $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ čije su klase ekvivalencije $\{1, 4, 5\}$ i $\{2, 3\}$.

Zadatak 27. Ispišite klase ekvivalencije relacije

$$\rho = \{(1,1), (1,5), (1,7), (2,2), (2,4), (3,3), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (5,7), (6,6), (7,1), (7,5), (7,7)\}.$$

Ako elemente poredamo tako da su oni koji pripadaju istoj klasi susjedni, kako izgleda tablica susjednosti te relacije?

Zadatak za DZ. Ispitajte svojstva sljedećih relacija:

(a) $=$ na skupu $\mathbb{Q}$

(b) disjunktnost na skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

(c) $\mid$ na skupu $\mathbb{N}$

(d) $\mid$ na skupu $\mathbb{Z}$

gdje je sa $\mid$ označena relacija definirana sa: $a \mid b \Leftrightarrow a$ dijeli b.