Elementarna matematika 1

Vježbe 1

4.10.2024.

Sud je svaka izjavna (matematička) rečenica (zapisana riječima ili simbolima) za koju se može utvrditi je li istinita ili lažna.

Jesu li sljedeće izjave sudovi:

1. Broj 13 je jednak broju 7
2. $1+1+1=2$
3. $x+1=2$
4. Za sve prirodne brojeve x vrijedi $x+0=x$
5. Svaki polinom stupnja većeg ili jednakog 1 ima nultočku u skupu kompleksnih brojeva
6. Ova izjava je lažna

Logički veznici

Negacija suda A je sud koji je istinit točno onda kada je sud A lažan.

Oznaka: $\neg A$ ili $\overline{A}$

Čitamo: *"ne A"* ili *"nije A"*

A	$\neg A$
1	0
0	1

Konjunkcija sudova A i B je složeni sud koji je istinit točno onda kada su istiniti i sud A i sud B.

Oznaka: $A \wedge B$, $A \& B$ ili $A \cdot B$

Čitamo: "*A i B*"

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunkcija sudova A i B je složeni sud koji je lažan točno onda kada su lažni i sud A i sud B.

Oznaka: $A \vee B$, $A | B$ ili $A + B$

Čitamo: *"A ili B"*

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikacija sudova A i B je složeni sud koji je lažan samo onda kada je sud A istinit, a sud B lažan.

Oznaka: $A \Rightarrow B$ ili $A \rightarrow B$

Čitamo: *"A povlači B"*, *''A implicira B"*, *"Ako A, onda B"*, *"Iz A slijedi B"*, *"B je **nužan uvjet** za A"* ili *"A je **dovoljan uvjet** za B"*

A	B	$A \Rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ekvivalencija sudova A i B je složeni sud koji je istinit točno onda kada su i sud A i sud B oba istiniti ili oba lažni.

Oznaka: $A \Leftrightarrow B$ ili $A \leftrightarrow B$

Čitamo: *"A vrijedi ako i samo ako vrijedi B"* (kraći zapis *"A akko B"*) ili *"A je **nužan i dovoljan uvjet** za B"*

A	B	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Zadatak 1. Neka je $A \equiv 2^3 = 8$ i $B \equiv 7 > 5$. Zapišite sljedeće sudove:

(a) $A \Rightarrow \neg B$

(b) $A \vee \neg B$

(c) $\neg A \Leftrightarrow B$

(d) $\neg(\neg A)$

(e) $(A \wedge \neg B) \Rightarrow A$

Zadatak 2. Odredite istinitost sljedećih sudova:

(a) *"Ako je* $3 + 2 = 7$*, onda je* $4 + 4 = 8$*."*

(b) *"Nije istina da je* $6^2 = 32$ *ako i samo ako je* $4 \geq 10$*."*

(c) *"Nije istina da je* $\log_2 16 = 3$ *ili* $\cos 0 = 1$*."*

(d) *"Nije istina da, ako je* 10 *djeljiv s* 3*, onda je* $\sqrt{9} = 4$*."*

Kažemo da su složeni sudovi A i B **semantički jednaki** ili **logički ekvivalentni** ako i samo ako je sud $A \Leftrightarrow B$ tautologija, tj. ako sudovi A i B imaju identične stupce u tablici istinitosti. Tada pišemo $A \equiv B$.

Zadatak 3. Provjerite zakone **asocijativnosti** i **distributivnosti** za konjunkciju i disjunkciju:

(a) $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

(b) $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

(c) $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(d) $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

Kažemo da je složeni sud **tautologija** ako se njegov pripadni stupac u tablici istinitosti sastoji samo od oznaka 1.

Zadatak 4. Dokažite da su sljedeći složeni sudovi tautologije.

(a) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$

(b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

(c) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Kako glase negacije sljedećih sudova:

1. *"Broj* 18 *je djeljiv s* 3 *i s* 4*"*

2. *"Broj* 9 *je prost ili je paran"*

3. *"Ako je* 6^2 *djeljiv s* 4*, onda je* 6 *djeljiv s* 4*"*

Zadatak 5. Dokažite sljedeće identitete:

(a) $\neg(\neg A) \equiv A$

(b) $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

(c) $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

(d) $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

(e) $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

(f) $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Neka je $A \Rightarrow B$ sud. Tada kažemo:

- Sud $B \Rightarrow A$ je **obrat** sud $A \Rightarrow B$;
- Sud $\neg B \Rightarrow \neg A$ je **obrat po kontrapoziciji** suda $A \Rightarrow B$.

Zadatak 6. Odredite sud F takav da sud

$$\big((A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C\big) \Rightarrow \big((A \vee B) \wedge (\neg C \vee F)\big)$$

bude tautologija.

Predikati i kvantifikatori

Jednomjesni predikat je izjavna (matematička) rečenica koja sadrži varijablu i čija istinitost ovisi o vrijednosti te varijable. Uvrštavanjem konkretne vrijednosti za tu varijablu predikat postaje sud.

Općenito, n-**mjesni predikat** je izjavna rečenica koja sadrži n varijabli te koja postaje sud uvrštavanjem konkretnih vrijednosti za te varijable.

Neka je $P(x)$ predikat.

- Sud

$$(\forall x) P(x)$$

  je istinit točno onda kada je $P(x)$ istinit za sve (dozvoljene) vrijednosti varijable x.

  Čitamo: *"Za svaki x vrijedi $P(x)$"*

  Oznaku $\forall$ zovemo **univerzalni kvantifiktor**

Neka je $P(x)$ predikat.

- Sud

  $$(\exists x)\,P(x)$$

  je istinit točno onda kada postoji barem jedna vrijednost varijable x za koju je sud $P(x)$ istinit.

  Čitamo: *"Postoji x za koji vrijedi $P(x)$"*

  Oznaku $\exists$ zovemo **egzistencijalni kvantifiktor**

Zapišimo sljedeće sudove simbolima:

1. *“Svaki cijeli broj k djeljiv je s* 1*”*

2. *“Postoji realan broj koji nije racionalan”*

3. *“Postoji jedinstven prirodan broj čiji kvadrat je jednak* 9*”*

Zadatak 7. Zapišite simbolima sljedeće sudove:

(a) "Za svaki realan broj postoji prirodan broj koji je veći od njega"

(b) "Postoji prirodan broj koji je djelitelj svakog prirodnog broja"

Zadatak 8. Zapišite sljedeće sudove riječima i provjerite njihovu istinitost:

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(n < m)$

(b) $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n < m)$

Zadatak 9. Odredite istinitost sljedećih sudova:

(a) $(\forall x \in \mathbb{R})(x = x^2)$

(b) $(\exists x \in \mathbb{R})(x = x^2)$

(c) $(\forall x \in \mathbb{R})(x + 1 > x)$

(d) $(\exists x \in \mathbb{R})(x + 2 = x)$

(e) $(\exists x \in \mathbb{R})(|x| = 0)$

(f) $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})(y \geq x)$

(g) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(y \geq x)$

(h) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \geq x)$

(i) $(\forall y \in \mathbb{R}_+)(\exists x \in \mathbb{R}_+)(xy = 1)$

Zadatak 10. Zapišite sljedeće sudove simbolima:

(a) "Svaki prirodan broj manji je od nekog prirodnog broja"

(b) "Postoji pridodan broj veći od svakog prirodnog broja"

(c) "Svaki prirodan broj koji je djeljiv s 14 je djeljiv s 2 i sa 7"

(d) "Svaki prirodan broj koji je kvadrat parnog broja je djeljiv s 4"

(e) "Za svaka dva prirodna broja vrijedi: ako je njihov produkt djeljiv nekim prostim brojem, onda je istim prostim brojem djeljiv barem jedan od njih"

Zapišimo negacije sljedećih sudova:

1. "Svaki prirodan broj je paran"
2. "Postoji prirodan broj koji je negativan"
3. "Svaki pozitivan broj veći je od recipročne vrijednosti nekog prirodnog broja"

Zadatak 11. Zapišite negacije sljedećih sudova:

(a) $(\exists x \in \mathbb{N})(x+1=8)$

(b) $(\forall x \in \mathbb{N})(x<8)$

(c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2+y^2 \geq 4)$

(d) $(\forall x \in \mathbb{R})(x>0 \vee x<0)$

(e) $(\forall x \in \mathbb{Q})(x \cdot 0 = 0 \wedge x \cdot 1 = x)$

(f) $(\exists a \in \mathbb{R}_+)(a \neq -1 \Rightarrow a = -2)$

(g) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow (x<0 \vee x \geq 1))$

(h) $\big((\exists x \in \mathbb{Q})(x^2=2)\big) \Rightarrow \big((\forall y \in \mathbb{Q})(y+\sqrt{2} \in \mathbb{Q})\big)$

Zadatak 12. Napišite obrat po kontrapoziciji sljedećih implikacija:

(a) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 7x + 12 > 0 \Rightarrow x < 3)$

(b) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 2x > 0 \Rightarrow (x > 2 \vee x < 0))$

(c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\big((x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0\big)$

(d) $(\forall n \in \mathbb{N})\,(2 \mid n \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(n = 4k \vee n = 4k + 2))$

Zadatak 13. Označimo $P(x) \equiv$ *"x je prost broj"*. Zadana je tvrdnja:

"Postoji prirodan broj manji od svakog
prostog broja manjeg od 100*."*

Napišite simbolima zadanu tvrdnju te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji. Odredite istinitost zadane i svih dobivenih tvrdnji.

Zadatak 14. Zadana je tvrdnja:

"Za svaka dva prirodna broja vrijedi: ako je jedan od njih veći od drugog, onda postoji paran broj manji od njihovog zbroja."

Napišite simbolima zadanu tvrdnju te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji. Odredite istinitost zadane i svih dobivenih tvrdnji.