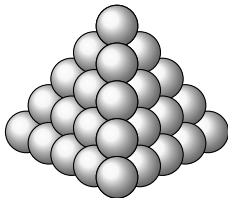


Elementarna matematika 1

Vježbe 7

Zadatak 18. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi: umnožak bilo kojih n prirodnih brojeva je djeljiv s $n!$.

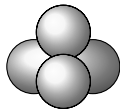
Zadatak 19. Kuglice su složene u pravilnu trostranu piramidu tako da je n kuglica duž svakog brida (vidi sliku). Dokažite da se piramida sastoji od $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ kuglica.



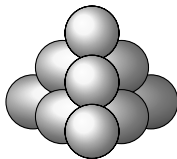
Slika: Piramida za $n = 5$



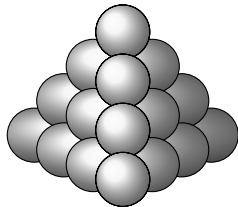
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$

Zadatak 20. Dokažite da se za svaki prirodan broj n ploča dimenzija $2^n \times 2^n$ kojoj je otklonjen jedan kut može popločati trominama oblika .

Zadatak 21. U nekoj državi postoji n gradova. Između svaka dva grada postoji jedna jednosmjerna cesta. Dokažite da postoji ruta kojom možemo obići svih n gradova tako da svaki posjetimo točno jednom.

Zadatak 22. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj te neka su $A_1, A_2, \dots, A_n$ skupovi. Dokažite da se element x nalazi u skupu

$$A_1 \Delta A_2 \Delta \dots \Delta A_n$$

ako i samo ako za neparno mnogo indeksa $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ vrijedi $x \in A_i$.

Zadatak 23. Neka je $\leq$ bilo koji parcijalni uređaj na konačnom skupu S . Dokažite da se $\leq$ može proširiti do totalnog uređaja na S .

Cauchyjeva indukcija ili indukcija unaprijed-unatrag

Neka je $P(n)$ predikat koji ovisi o prirodnom broju n i neka vrijedi:

BAZA: $P(2)$ je istina.

KORAK 1: Ako je $P(2^n)$ istina za neki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$, onda je i $P(2^{n+1})$ istina.

KORAK 2: Ako je $P(n)$ istina za neki prirodan broj $n \geq 2$, onda je i $P(n-1)$ istina.

Tada je $P(n)$ istina za sve prirodne brojeve n .