Elementarna matematika 1

Vježbe 11

Polinomi

Polinom n-tog stupnja (nad $\mathbb{R}$) je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana sa

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

gdje su $n \in \mathbb{N}_0$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Brojeve $a_0, \ldots, a_n$ zovemo **koeficijenti polinoma** .
Ako je $f(x) = 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, onda polinom f zovemo **nulpolinom** i pišemo $f = 0$.
Ako je $a_n \neq 0$, broj n zovemo **stupanj polinoma** te pišemo $\deg f = n$, a broj a_n zovemo **vodeći koeficijent**. Broj a_0 zovemo **slobodni koeficijent**.
Skup svih polinoma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ označavamo sa $\mathbb{R}[x]$.

Stupanj nulpolinoma se uglavnom ne definira. No, nekad je iz formalnih razloga pogodno staviti $\deg 0 = -1$ ili $\deg 0 = -\infty$.

Teorem o nulpolinomu

Polinom $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ jednak je nulpolinomu ako i samo ako je $a_i = 0$ za sve $i = 0, 1, \ldots, n$.

Teorem o jednakosti polinoma

Polinomi $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ i $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ su jednaki ako i samo ako je $m = n$ i $a_i = b_i$ za sve $i = 0, 1, \ldots, n$.

Zadatak 1. Odredite polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljava sljedeće uvjete

- $\deg f = 3$,
- $f(0) = 0$,
- $f(x) - f(x-1) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Operacije na polinomima

Zbrajanje polinoma

Neka su $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i
$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ polinomi.

BSO Pretpostavimo da je $n \geq m$.[1]

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) = f(x) + g(x) &= (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0) + (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) \\
&= a_n x^n + \cdots + (a_m + b_m) x^m + \cdots + (a_1 + b_1) x + (a_0 + b_0)
\end{aligned}
$$

Funkcija $f + g$ je ponovno polinom.

---

[1] inače zamijenimo uloge f i g

Množenje polinoma

Neka su $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i
$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ polinomi.

$$
\begin{aligned}
(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) &= (a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0)(b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) \\
&= a_n b_m x^{n+m} + (a_{n-1} b_m + a_n b_{m-1}) x^{n+m-1} + \dots \\
&\qquad + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0
\end{aligned}
$$

Funkcija fg je ponovno polinom.

Kompozicija polinoma

Neka su $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ i
$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ polinomi.

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= a_n (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)^n + a_{n-1} (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)^{n-1} + \dots \\
&\qquad + a_1 (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0) + a_0 \\
&= a_n b_m^n x^{mn} + (\text{niže potencije})
\end{aligned}
$$

Veza operacija i stupnja

Za stupanj ne-nul polinoma f i g vrijedi

- $\deg(f+g) \leq \max\{\deg f, \deg g\}$,
- $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$,
- $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

Dijeljenje polinoma

Dijeljenje polinoma nije standardna operacija jer rezultat ne mora ponovno biti polinom.

Za polinome $f, g \in \mathbb{R}[x]$ je

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)},$$

funkcija s domenom $\{x \in \mathbb{R} : g(x) \neq 0\}$.

Općenito, funkciju dobivenu dijeljenjem polinoma zovemo **racionalna funkcija**.

Osim realnih polinoma, možemo na identičan način promatrati i polinome nad proizvoljnim prstenom $\mathbb{K}$.

Polinom nad $\mathbb{K}$ je funkcija $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ oblika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

gdje su sada $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

Skup svih polinoma nad $\mathbb{K}$ označavamo sa $\mathbb{K}[x]$.

Na EM1 će najčešće biti $\mathbb{K} = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$.

Nultočke i dijeljenje polinoma

Nultočka polinoma $f \in \mathbb{C}[x]$ je (kompleksni) broj α takav da je $f(\alpha) = 0$.

Polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ je **djeljiv** polinomom $g \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$ ako postoji polinom $h \in \mathbb{R}[x]$ takav da $f = gh$. Pišemo $g \mid f$.

Uočimo: ako je $f = gh$ i $f \neq 0$, onda je $\deg f = \deg g + \deg h$, pa je posebno $\deg f \geq \deg g$.

Teorem o dijeljenju s ostatkom

Neka su $f, g \in \mathbb{R}[x]$, $g \neq 0$. Tada postoje jedinstveni polinomi $q, r \in \mathbb{R}[x]$ takvi da je $f = qg + r$, pri čemu je $r = 0$ ili $0 \leq \deg r < \deg g$.

Ista tvrdnja vrijedi i za polinome iz $\mathbb{Q}[x]$ i $\mathbb{C}[x]$.

Primjer. Odredimo ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ polinomom $g(x) = x^2 + 2x - 1$.

$$
\begin{array}{l}
(\ \ x^3 - 2x^2 + \ \ x\ + 3) : (x^2 + 2x - 1) = x - 4 \\
\underline{-x^3 - 2x^2 + \ \ x \qquad\quad} \\
\qquad\ \ -4x^2 + 2x\ + 3 \\
\qquad\ \ \underline{+4x^2 + 8x\ - 4} \\
\qquad\qquad\quad 10x - 1
\end{array}
$$

Za polinom $f \in \mathbb{R}[x]$ kažemo da je **normiran** ako mu je vodeći koeficijent jednak 1.

Neka su $f, g \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0\}$. **Najveća zajednička mjera** polinoma f i g je *normirani* polinom $h \in \mathbb{R}[x]$ *najvećeg stupnja* takav da su i f i g djeljivi s h.

Pišemo $h = M(f, g)$.

Primjer. Odredimo najveću zajedničku mjeru polinoma

$$f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1,$$

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2.$$

Zadatak 2. Dokažite da je ostatak pri dijeljenju polinoma f polinomom $x-\alpha$ jednak $f(\alpha)$.

Bezoutov teorem

Broj $\alpha \in \mathbb{C}$ je nultočka polinoma $f \in \mathbb{C}[x]$ ako i samo ako je f djeljiv polinomom $x - \alpha$.

Zadatak 3. Neka je $f(x) = 3x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$ i $g(x) = x^3 - ax^2 - ax - 1$. Dokažite da $M(f, g)$ nije djeljiva polinomom $x + 1$ ni za koji $a \in \mathbb{R}$.

Zadatak 4. Dokažite da je polinom
$f(x) = (x^2 + x - 1)^{2n} + (x^2 - x - 1)^{2n} - 2$ djeljiv polinomom
$g(x) = x^2 - x$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Hornerov algoritam

Hornerov algoritam

Neka je

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

i neka je $\alpha \in \mathbb{R}$.

Prema teoremu o dijeljenju s ostatkom i Bezoutovom teoremu postoji polinom

$$q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

takav da je

$$f(x) = q(x)(x - \alpha) + f(\alpha), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Uvrstimo formule za $f(x)$ i $q(x)$:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0)(x - \alpha) + f(\alpha)$$

Hornerov algoritam

Nakon množenja dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\
&= b_{n-1} x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1}) x^{n-1} + \cdots + (b_0 - \alpha b_1) x + (f(\alpha) - \alpha b_0).
\end{aligned}
$$

Izjednačimo pripadne koeficijente:

$$
\begin{array}{lcl}
a_n = b_{n-1} & \Rightarrow & b_{n-1} = a_n \\
a_{n-1} = b_{n-2} - \alpha b_{n-1} & \Rightarrow & b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\
\vdots & & \vdots \\
a_k = b_{k-1} - \alpha b_k & \Rightarrow & b_{k-1} = a_k + \alpha b_k \\
\vdots & & \vdots \\
a_1 = b_0 - \alpha b_1 & \Rightarrow & b_0 = a_1 + \alpha b_1 \\
a_0 = f(\alpha) - \alpha b_0 & \Rightarrow & f(\alpha) = a_0 + \alpha b_0
\end{array}
$$

Hornerov algoritam

Ovoaj račun kompaktno zapisujemo tablično:

	a_n	a_{n-1}	$\dots$	a_k	$\dots$	a_1	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	$\dots$	b_{k-1}	$\dots$	b_0	$f(\alpha)$

Primjer. Izračunajmo $f(3)$ ako je $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 8x - 5$.

Zadatak 5. Podijelite $f(x) = 2x^5 - x^3 + x + 8$ s $g(x) = x - 2$.

Zadatak 6. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma
$f(x) = x^{100} + 3x^{99} + x^2 - 3x + 9$ polinomom $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

Zadatak 7. Polinom $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x + b$ pri dijeljenju polinomom $x-2$ daje ostatak 6, a pri dijeljenju polinomom $x+1$ ostatak 0. Odredite koeficijente a i b.

Zadatak 8. Polinom f pri dijeljenju s $x+1$ daje ostatak 4, a pri dijeljenju s x^2+1 daje ostatak $2x+3$. Odredite ostatak pri dijeljenju polinoma f s $(x+1)(x^2+1)$.

Zadatak 9. Odredite sve polinome $f \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju

$$xf(x-1) = (x-3)f(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$