JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta.
Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i geometrijskog pribora.

Zadatak 1.

Neka je $ABCD$ kvadrat. Točke P, Q i R su redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$. Dužine $\overline{PC}$ i $\overline{QD}$ sijeku se u točki K.

(a) Dokažite da su pravci AR i DQ okomiti.

(b) Dokažite da je $|AK| = |AD|$.

Napomena. Smijete koristiti tvrdnju iz (a) dijela zadatka u (b) dijelu zadatka čak i ako ga niste riješili.

JMBAG IME I PREZIME BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 2.

Neka je ABC šiljastokutni trokut s opisanom kružnicom k. Neka je D drugo sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ i kružnice k (različito od A). Neka je E točka na kraćem luku $\overset{\frown}{AC}$ takva da je $|AE| = |BD|$. Označimo sa F sjecište pravaca AC i DE. Neka je G sjecište simetrale kuta $\sphericalangle DFC$ i pravca BC. Dokažite da je četverokut $BDGF$ tetivan.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 3.

Neka je ABC trokut u kojem je težišnica iz vrha B okomita na težišnicu iz vrha C. Dokažite da je

$$|AB|^2 + |AC|^2 < \frac{5}{2} \cdot |AB| \cdot |AC|.$$

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 4.

Neka je $ABCD$ paralelogram i S sjecište njegovih dijagonala. Odaberimo točku E tako da točka B bude polovište dužine $\overline{EC}$. Neka je F sjecište pravaca AB i SE. Konačno, neka je M sjecište pravaca DF i BC. Odredite omjer $|BM| : |BC|$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 5.

(a) Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektori iz V^3 takvi da je $\vec{a} \neq 0$ i

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{c}, \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{a} \times \vec{c}. \end{aligned}$$

Dokažite da je $\vec{b} = \vec{c}$.

(b) Zadan je vektor $\vec{w} \in V^3$, $\vec{w} \neq 0$. Odredite sve realne brojeve t za koje postoji vektor $\vec{v}$ takav da je

$$\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = t\vec{w}.$$

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje i geometrijskog pribora.

Zadatak 1.

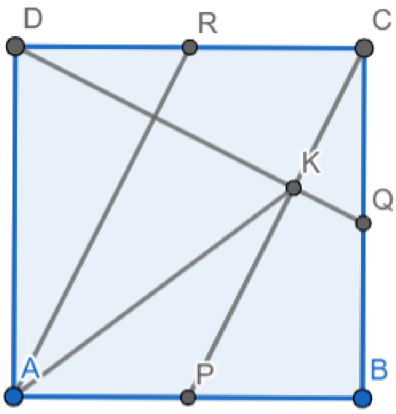
Neka je $ABCD$ kvadrat. Točke P, Q i R su redom polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$. Dužine $\overline{PC}$ i $\overline{QD}$ sijeku se u točki K.

(a) Dokažite da su pravci AR i DQ okomiti.

(b) Dokažite da je $|AK| = |AD|$.

Napomena. Smijete koristiti tvrdnju iz (a) dijela zadatka u (b) dijelu zadatka čak i ako ga niste riješili.

Rješenje.



Primijetimo da su trokuti PBC, QCD i RDA sukladni. Naime, svi ti trokuti su pravokutni, te im je dulja kateta jednake duljine kao stranica kvadrata, a kraća kateta jednake duljine kao pola stranice kvadrata, pa sukladnost slijedi iz SKS poučka.

Nadalje, AR i PC su paralelni jer je zbog spomenute sukladnosti $\angle ARD = \angle CPB$. Konačno, PC je okomit na DQ jer je

$$\angle CKQ = 180^\circ - \angle DQC - \angle PCB = 90^\circ,$$

jer vrijedi $\angle PCB = \angle CDQ$, pa se iz trokuta CDQ lako vidi $\angle DQC + \angle CDQ = 90^\circ$. Kako je AR paralelan s PC, zaključujemo da je i AR okomit na DQ, čime je (a) dio dokazan.

Primijetimo da je AR visina u trokutu ADK. S druge strane, AR je srednjica u trokutu DKC, jer je paralelna sa stranicom i prolazi kroz jedno polovište stranice. Zaključujemo da AR raspolavlja dužinu $\overline{DK}$. Dakle, u trokutu ADK se visina i simetrala stranice poklapaju, pa je taj trokut jednakokračan, i slijedi $|AD| = |AK|$.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

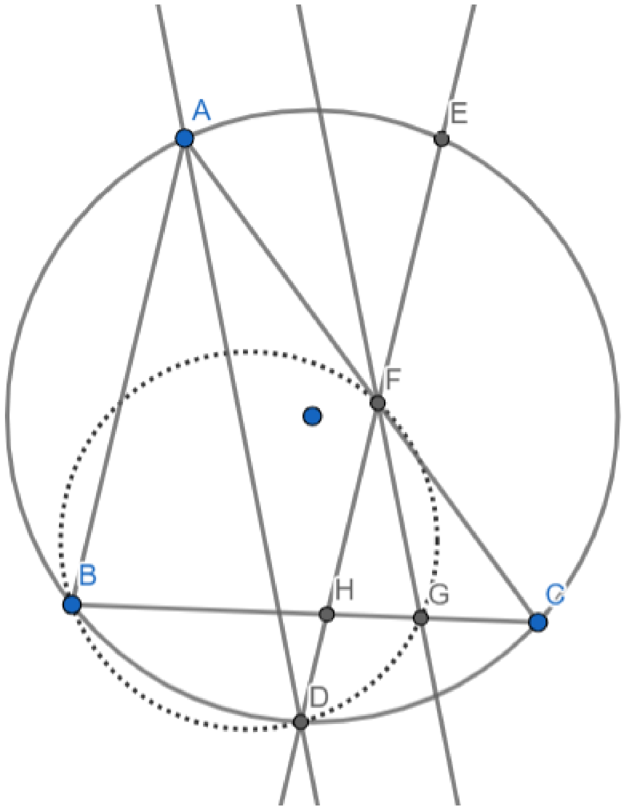
ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 2.

Neka je ABC šiljastokutni trokut s opisanom kružnicom k. Neka je D drugo sjecište simetrale kuta $\sphericalangle BAC$ i kružnice k (različito od A). Neka je E točka na kraćem luku $\widehat{AC}$ takva da je $|AE| = |BD|$. Označimo sa F sjecište pravaca AC i DE. Neka je G sjecište simetrale kuta $\sphericalangle DFC$ i pravca BC. Dokažite da je četverokut $BDGF$ tetivan.

Rješenje.



Označimo s α kut $\sphericalangle BAC$.

Primijetimo da su $\overline{BD}$ i $\overline{AE}$ tetive na k koje su iste duljine, pa obodni kutevi nad tim tetivama moraju biti iste veličine. Obodni kut nad $\overline{BD}$ je $\frac{\alpha}{2}$ jer je AD simetrala kuta $\sphericalangle BAC$, pa je i obodni kut nad $\overline{AE}$ jednak $\frac{\alpha}{2}$. Iz toga slijedi $\sphericalangle ADE = \frac{\alpha}{2} = \sphericalangle BAD$, odnosno AB i DE su paralelni. Onda je $\sphericalangle DFC = \alpha$ i $\angle DFG = \frac{\alpha}{2}$. S druge strane, primijetimo da je $\angle DBG = \angle DBC = \angle DAC = \frac{\alpha}{2}$ jer su to sve kutevi nad tetivom $\overline{CD}$.

Zaključujemo da je $\angle DFG = \angle DBG$. Prema teoremu o obodnim kutevima, četverokut $BDGF$ je tetivan.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

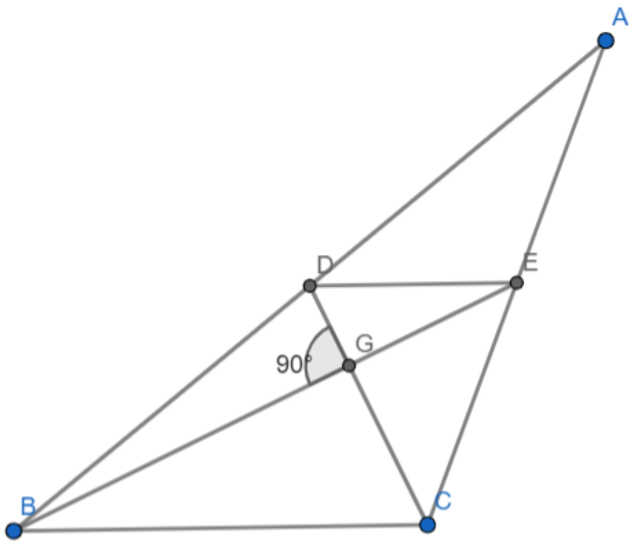
ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 3.

Neka je ABC trokut u kojem je težišnica iz vrha B okomita na težišnicu iz vrha C. Dokažite da je

$$|AB|^2 + |AC|^2 < \frac{5}{2} \cdot |AB| \cdot |AC|.$$



Prvo rješenje. Označimo s G težište trokuta ABC, te s D i E polovišta od $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$. Označimo sa x duljinu $|DG|$ te s y duljinu $|GE|$. Tada je $|BG| = 2y$ i $|CG| = 2x$ jer težište dijeli težišnicu u omjeru $2 : 1$.

Primijetimo da je $|BD| = \frac{1}{2}|AB|$ i $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$. Prema Pitagorinom poučku u trokutima BGD i EGC, imamo

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= 4|BD|^2 = 4(x^2 + 4y^2), \\ |AC|^2 &= 4|CE|^2 = 4(y^2 + 4x^2). \end{aligned}$$

Dakle, preostaje dokazati

$$4 \cdot (5x^2 + 5y^2) < \frac{5}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{(x^2 + 4y^2)(y^2 + 4x^2)}.$$

To je ekvivalentno s

$$(2x^2 + 2y^2)^2 < (x^2 + 4y^2)(y^2 + 4x^2).$$

Raspisivanjem obaju strana dobivamo da je to pak ekvivalentno s

$$4x^4 + 8x^2y^2 + 4y^4 < 4x^4 + 17x^2y^2 + 4y^4,$$

što očito vrijedi jer su x i y pozitivni.

Drugo rješenje. Vektori $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{BE}$ su okomiti, pa im je skalarni produkt jednak 0. Izrazimo ih preko vektora $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AB}$, te označimo njihove duljine s b i c redom.

Imamo

$$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = -\vec{c} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}.$$

Slično, imamo

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = -\vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}.$$

Njihov skalarni produkt je

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b}\right) \\ &= b^2 + c^2 - \frac{5}{2} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}). \end{aligned}$$

Kako je $\vec{b} \cdot \vec{c} = bc\cos(\alpha)$, gdje je $\alpha = \sphericalangle BAC$ kut između $\vec{b}$ i $\vec{c}$, zaključujemo da je

$$b^2 + c^2 = \frac{5}{2}bc\cos(\alpha) < \frac{5}{2}bc,$$

jer je $\cos(\alpha) < 1$ za $\alpha \in (0, \pi)$.

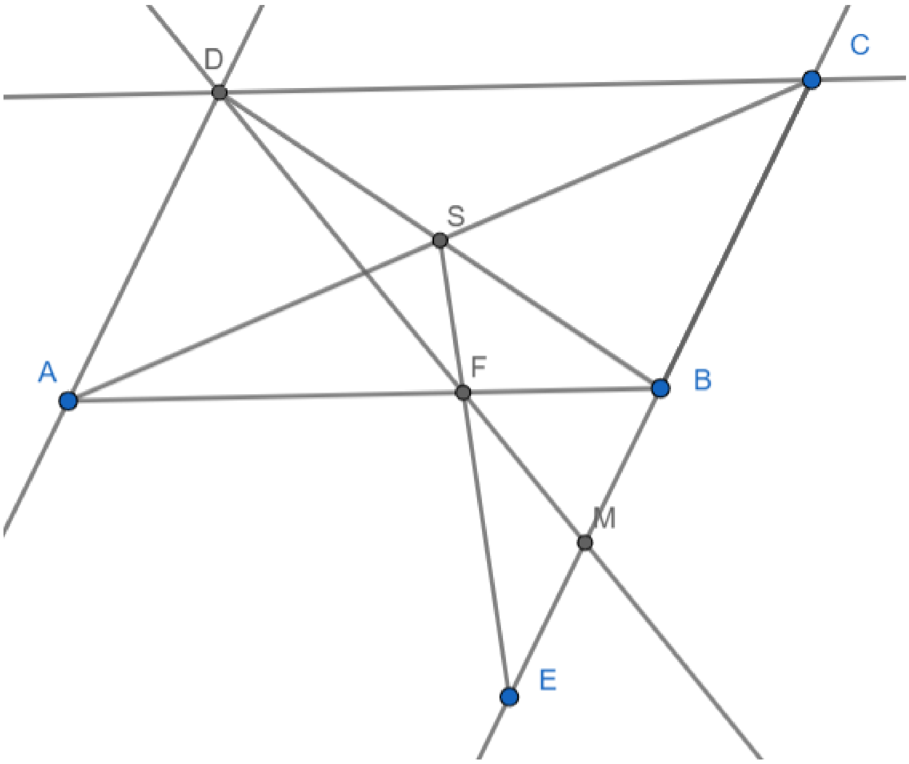
JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 4.

Neka je $ABCD$ paralelogram i S sjecište njegovih dijagonala. Odaberimo točku E tako da točka B bude polovište dužine $\overline{EC}$. Neka je F sjecište pravaca AB i SE. Konačno, neka je M sjecište pravaca DF i BC. Odredite omjer $|BM| : |BC|$.



Prvo rješenje. Kako se u paralelogramu dijagonale raspolavljaju, vrijedi da je S polovište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

Označimo sa $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$.

Odredimo prvo $|AF| : |FB|$. Imamo $\overrightarrow{AF} = \alpha\vec{a} = \overrightarrow{AS} + \beta\overrightarrow{SE}$ za neke α, β koje tek treba odrediti.

Vidimo da je $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, te je $\overrightarrow{SE} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$. Dakle, dobivamo jednakost

$$\alpha\vec{a} = \frac{1+\beta}{2}\vec{a} + \frac{1-3\beta}{2}\vec{b}.$$

Dakle, dobivamo sustav jednadžbi

$$\alpha = \frac{1+\beta}{2},$$
$$0 = \frac{1-3\beta}{2}.$$

Iz druge jednadžbe slijedi $\beta = \frac{1}{3}$, a onda je $\alpha = \frac{2}{3}$. Dakle, $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\vec{a}$.

Sada izrazimo $\overrightarrow{DM}$ na dva načina. Imamo $\overrightarrow{DM} = \lambda\overrightarrow{DF} = -\lambda\vec{b} + \frac{2\lambda}{3}\vec{a}$, te $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = \vec{a} - \mu\vec{b}$ za neke λ, μ koje tek treba odrediti.

Dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \frac{2\lambda}{3} &= 1, \\ -\lambda &= -\mu. \end{aligned}$$

Dakle, $\lambda = \mu = \frac{3}{2}$. Iz toga čitamo da je $|MC| = \frac{3}{2}|BC|$, pa je $|BM| : |BC| = 1 : 2$.

Drugo rješenje. Kako se u paralelogramu dijagonale raspolavljaju, vrijedi da je S polovište dužina $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

Promotrimo trokut ACE. Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{ES}$ su težišnice u tom trokutu, pa je F težište tog trokuta. Kako težište dijeli težišnicu u omjeru $2:1$, zaključujemo da je $|EF| = 2|FS|$.

Promotrimo sada trokut DBE. Dužina $\overline{ES}$ je težišnica u tom trokutu, a F je točka na njoj takva da je $|EF| = 2|FS|$, pa zaključujemo da je F težište od DBE. Onda je DF težišnica u tom trokutu, pa je M polovište dužine $\overline{BE}$. Sada lako zaključujemo da je $|BM| : |BC| = 1 : 2$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

ELEMENTARNA MATEMATIKA 2

Prvi kolokvij – 26. travnja 2024.

Zadatak 5.

(a) Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektori iz V^3 takvi da je $\vec{a} \neq 0$ i

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c},$$
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}.$$

Dokažite da je $\vec{b} = \vec{c}$.

(b) Zadan je vektor $\vec{w} \in V^3$, $\vec{w} \neq 0$. Odredite sve realne brojeve t za koje postoji vektor $\vec{v}$ takav da je

$$\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = t\vec{w}.$$

Rješenje.

(a) Pretpostavimo da je $\vec{b} \neq \vec{c}$.

Iz prve jednakosti slijedi $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, pa je $\vec{a}$ okomit na $\vec{b} - \vec{c}$. Iz druge jednakosti slijedi $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, pa je $\vec{a}$ kolinearan s vektorom $\vec{b} - \vec{c}$. To je kontradikcija, jer ne-nul vektori ne mogu istovremeno biti i okomiti i kolinearni.

(b) **Prvo rješenje.** Odgovor je svi brojevi $t \leq 0$.

Za $t = 0$ možemo uzeti $\vec{v} = 0$. Neka je nadalje $t \neq 0$.

Pretpostavimo da vektori $\vec{v}$ i $\vec{w}$ zadovoljavaju jednakost iz zadatka.

Primijetimo da je $\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{w})$ okomit na $\vec{v}$, pa zaključujemo da je $\vec{w}$ nužno okomit na $\vec{v}$. Promotrimo sada normirane vektore $\vec{a} := \frac{1}{||\vec{v}||}\vec{v}$ i $\vec{b} := \frac{1}{||\vec{w}||}\vec{w}$. Oni su okomiti, pa $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ čine pozitivno orijentiranu ortonormiranu bazu.

Onda vrijedi $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = -\vec{b}$, odnosno zapisano u terminima $\vec{v}$ i $\vec{w}$ imamo

$$\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = -||\vec{v}||^2\vec{w}.$$

Slijedi da je $t\vec{w} = -||\vec{v}||^2\vec{w}$, iz čega dobivamo $t = -||\vec{v}||^2 \leq 0$. Dakle, brojevi $t > 0$ nisu rješenja zadatka.

Obratno, za $t < 0$ i za fiksan $\vec{w}$, možemo uzeti $\vec{v}$ da bude bilo koji vektor norme $\sqrt{-t}$ koji je okomit na $\vec{w}$ i vidimo da tražena je jednakost zadovoljena.

(b) **Drugo rješenje.** Koristimo identitet

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Onda je

$$\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

Ako je $\vec{v}$ kolinearan s $\vec{w}$, onda je $\vec{v} \times \vec{w} = 0$ i mora biti $t = 0$. Za $t \neq 0$, onda $\vec{v}$ ne smije biti kolinearan s $\vec{w}$. Onda jednakost

$$(\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{v})\vec{w} = t\vec{w}$$

vrijedi ako i samo ako je $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ i $\vec{v} \cdot \vec{v} = -t$, odnosno ako i samo ako je $\vec{v}$ okomit na $\vec{w}$ i $||\vec{v}||^2 = -t$. Dalje lako zaključujemo kao i u prvom rješenju.