

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti kalkulator i službene šalabahtere.

Zadatak 1. (7 bodova) Zadani su pravac p i ravnina Π svojim jednadžbama

$$p \dots \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{6}, \quad \Pi \dots x + y + z + 2 = 0.$$

- (a) Odredite presjek pravca p i y -osi. Odredite presjek ravnine Π i z -osi.
- (b) Postoji li ravnina Σ koja je paralelna ravnini Π i sadrži pravac p ? Ako postoji, odredite njenu jednadžbu. Ako ne postoji, objasnite zašto.
- (c) Odredite udaljenost ravnine Π od ishodišta.
- (d) Napišite kanonsku jednadžbu pravca koji prolazi točkama $A = (3, 1, 0)$ i $B = (0, 0, 1)$.
- (e) Napišite parametarski koordinatni oblik jednadžbe ravnine koja prolazi točkama $X = (1, 1, 0)$, $Y = (2, 1, 0)$ i $Z = (0, 0, 1)$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2025.

Zadatak 2. (13 bodova)

- (a) Pravac $y = x$ je tangenta na kružnicu sa središtem u točki $S = (1, -1)$. Odredite jednadžbe tangenata na tu kružnicu koje su paralelne x -osi.
- (b) Odredite središnju (centralnu) jednadžbu elipse ako je njezin linearni ekscentricitet jednak 4, a numerički ekscentricitet $\frac{4}{5}$. Odredite jednadžbe direktrisa te elipse.
- (c) Odredite jednadžbu tangente na hiperbolu $2x^2 - 3y^2 = 5$ u njenoj točki $T = (2, 1)$. Odredite koordinate tjemenata te hiperbole.
- (d) Parabola prolazi točkom $A = (2, 2)$, tjeme joj se nalazi u ishodištu i os parabole je x -os. Ispitajte nalaze li se točke $B = (9/2, 3)$ i $C = (3, 9/2)$ na toj paraboli?
- (e) Krivulja je zadana jednadžbom $x^2 + 4xy + y^2 + 5 = 0$. Odredite koja je to krivulja.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2025.

Zadatak 3. (10 bodova) Dani su pravci p_1 i p_2

$$p_1 \dots \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{1}, \quad p_2 \dots \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{1}.$$

- (a) Pokažite da su pravci p_1 i p_2 mimosmjerni te odredite kanonsku jednadžbu pravca p koji je zajednička normala pravaca p_1 i p_2 .
- (b) Odredite jednadžbu ravnine π_1 koja prolazi kroz ishodište i paralelna je s pravcima p i p_1 , te jednadžbu ravnine π_2 koja prolazi kroz ishodište i paralelna je s pravcima p i p_2 .
- (c) Odredite kosinus kuta između pravaca p_1 i p_2 .

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2025.

Zadatak 4. (10 bodova) Odredite ortogonalnu projekciju pravca $\frac{x-7}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-6}{7}$ na ravninu koja prolazi ishodištem i ima normalu $(1, 3, 6)$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2025.

Zadatak 5. (10 bodova)

Odredite sve kružnice koje hiperbolu $2x^2 - y^2 = 2$ diraju u točkama $(-3, 4)$ i $(3, 4)$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti kalkulator i službene šalabahtere.

Zadatak 1. (7 bodova) Zadani su pravac p i ravnina Π svojim jednadžbama

$$p \dots \frac{x+3}{0} = \frac{y+2}{8} = \frac{z+1}{4}, \quad \Pi \dots x - y + z - 2 = 0.$$

- (a) Odredite presjek pravca p i x -osi. Odredite presjek ravnine Π i y -osi.
- (b) Odredite udaljenost ravnine Π od ishodišta.
- (c) Postoji li ravnina Σ koja je paralelna ravnini Π i sadrži pravac p ? Ako postoji, odredite njenu jednadžbu. Ako ne postoji, objasnite zašto.
- (d) Napišite kanonsku jednadžbu pravca koji prolazi točkama $A = (5, 0, 1)$ i $B = (0, 2, 0)$.
- (e) Napišite parametarski koordinatni oblik jednadžbe ravnine koja prolazi točkama $X = (1, 0, 2)$, $Y = (1, 0, 1)$ i $Z = (0, 1, 0)$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2025.

Zadatak 2. (13 bodova)

- (a) Pravac $y = -x$ je tangenta na kružnicu sa središtem u točki $S = (2, 2)$. Odredite jednadžbe tangenata na tu kružnicu koje su paralelne y -osi.
- (b) Odredite središnju (centralnu) jednadžbu elipse ako je njezin linearni ekscentricitet jednak 3, a numerički ekscentricitet $\frac{3}{5}$. Odredite jednadžbe direktrisa te elipse.
- (c) Odredite jednadžbu tangente na hiperbolu $x^2 - 5y^2 = 4$ u njenoj točki $T = (3, 1)$. Odredite koordinate tjemenata te hiperbole.
- (d) Parabola prolazi točkom $A = (6, 6)$, tjeme joj se nalazi u ishodištu i os parabole je x -os. Ispitajte nalaze li se točke $B = (3/2, 3)$ i $C = (3, 3/2)$ na toj paraboli?
- (e) Krivulja je zadana jednadžbom $x^2 + 2xy + y^2 + 6x + 4y + 1 = 0$. Odredite koja je to krivulja.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2025.

Zadatak 3. (10 bodova) Dani su pravci p_1 i p_2

$$p_1 \dots \frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-3}{-1}, \quad p_2 \dots \frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

- (a) Pokažite da su pravci p_1 i p_2 mimosmjerni te odredite kanonsku jednadžbu pravca p koji je zajednička normala pravaca p_1 i p_2 .
- (b) Odredite jednadžbu ravnine π_1 koja prolazi kroz ishodište i paralelna je pravcima p i p_1 , te jednadžbu ravnine π_2 koja prolazi kroz ishodište i paralelna je pravcima p i p_2 .
- (c) Odredite kosinus kuta između pravaca p_1 i p_2 .

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2025.

Zadatak 4. (10 bodova) Odredite ortogonalnu projekciju pravca $\frac{x-8}{6} = \frac{y-2}{5} = \frac{z-3}{4}$ na ravninu koja prolazi ishodištem i ima normalu $(1, 1, 3)$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2025.

Zadatak 5. (10 bodova)

Odredite sve kružnice koje hiperbolu $x^2 - 2y^2 = 4$ diraju u točkama $(-6, -4)$ i $(6, -4)$.