

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti kalkulator i službene šalabahtere.

Zadatak 1. (2+2+3+3 bodova)

- a) Napišite nužan i dovoljan uvjet da se ravnine
- Π_1
- i
- Π_2
- , zadane s

$$\Pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{i} \quad \Pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

sijeku po pravcu. Napišite nužan i dovoljan uvjet da se ravnina Π_1 i pravac p , zadan s

$$p \dots \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

sijeku, tj. da imaju točno jednu zajedničku točku. Oba uvjeta potrebno je napisati u terminima realnih parametara iz jednadžbi pripadnih ravnina i pravca.

- b) Imaju li pravci
- p_1
- i
- p_2
- zadani s

$$p_1 \dots \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 3}{0} \quad \text{i} \quad p_2 \dots \frac{x + 3}{-4} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 3}{0}$$

zajedničku normalu? Ako imaju, je li ona jedinstvena? Obrazložite Vaše odgovore.

- c) Napišite i dokažite formulu za udaljenost mimosmjernih pravaca u E^3 .
- d) Dokažite formulu za udaljenost točke od pravca u E^3 . Koristeći tu formulu izračunajte udaljenost ishodišta od pravca p_1 iz b) dijela zadatka.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

Zadatak 2. (3+2+3+5+1+1 bodova)

- a) Definirajte direktrisu elipse. Koliko direktrisa ima elipsa zadana s $x^2 + 2y^2 = 2$?
Napišite koordinate svih tjemenâ te elipse.
- b) Precizno iskažite Pappus–Boškovićevu karakterizaciju elipse.
- c) Napišite (središnju) jednadžbu neke hiperbole čija je jedna asimptota pravac zadan s $y = x$. Koliko ima hiperbola kojima je taj pravac asimptota? Može li se na hiperbolu koju ste odabrali povući tangenta paralelna y -osi? Ako može, napišite njenu jednadžbu.
- d) Iskažite i dokažite zrcalno svojstvo parabole.
- e) Napišite jednadžbu kružnice zadane s $x^2 + y^2 = 18$ u polarnom koordinatnom sustavu.
- f) Napišite jednadžbu središnje parabole čija udaljenost od fokusa do direktrise iznosi 5.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

Zadatak 3. (2+3+2 bodova)Dani su pravac p i ravnina π

$$p \dots \frac{x}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+4}{4}, \quad \pi \dots 2y - z = 5.$$

- a) Odredite ravninu paralelnu ravnini π koja sadrži pravac p .
- b) Odredite pravac q koji je ortogonalna projekcija pravca p na ravninu π .
- c) Odredite udaljenost pravaca p i q .

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

Zadatak 4. (3+4 bodova)

- a) Odredite jednadžbu hiperbole s fokusima $F_1 = (3 - 2\sqrt{5}, 2)$ i $F_2 = (3 + 2\sqrt{5}, 2)$ i asimptotama $y = 2x - 4$ i $y = -2x + 8$.
- b) Zadane su točke $A = (-1, 0)$ i $B = (1, 0)$. Odredite geometrijsko mjesto točaka T za koje vrijedi $|TA| = \sqrt{3}|TB|$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

Zadatak 5. (6 bodova)

Odredite kut (dovoljno je odrediti tangens kuta) između tangenti parabole $y^2 = 4x$ u točkama njezinog presjeka s pravcem $2x + y - 12 = 0$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti kalkulator i službene šalabahtere.

Zadatak 1. (2+2+3+3 bodova)

- a) Napišite nužan i dovoljan uvjet da se ravnine Π_1 i Π_2 , zadane s

$$\Pi_1 \dots A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{i} \quad \Pi_2 \dots A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

sijeku po pravcu. Napišite nužan i dovoljan uvjet da se ravnina Π_1 i pravac p , zadan s

$$p \dots \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

sijeku, tj. da imaju točno jednu zajedničku točku. Oba uvjeta potrebno je napisati u terminima realnih parametara iz jednadžbi pripadnih ravnina i pravca.

- b) Imaju li pravci p_1 i p_2 zadani s

$$p_1 \dots \frac{x}{0} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z + 3}{-3} \quad \text{i} \quad p_2 \dots \frac{x + 3}{0} = \frac{y}{-2} = \frac{z - 3}{6}$$

zajedničku normalu? Ako imaju, je li ona jedinstvena? Obrazložite Vaše odgovore.

- c) Napišite i dokažite formulu za udaljenost mimosmjernih pravaca u E^3 .
- d) Dokažite formulu za udaljenost točke od pravca u E^3 . Koristeći tu formulu izračunajte udaljenost ishodišta od pravca p_1 iz b) dijela zadatka.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

Zadatak 2. (3+2+3+5+1+1 bodova)

- a) Definirajte direktrisu hiperbole. Koliko direktrisa ima hiperbola koja je zadana s $x^2 - 2y^2 = 2$? Napišite koordinate svih tjemena te hiperbole.
- b) Precizno iskažite Pappus–Boškovićevu karakterizaciju elipse.
- c) Napišite (središnju) jednadžbu neke hiperbole čija je jedna asimptota pravac zadan s $y = -x$. Koliko ima hiperbola kojima je taj pravac asimptota? Može li se na hiperbolu koju ste odabrali povući tangenta paralelna y -osi? Ako može, napišite njenu jednadžbu.
- d) Iskažite i dokažite zrcalno svojstvo parabole.
- e) Napišite jednadžbu središnje parabole čija udaljenost od fokusa do direktrise iznosi 3.
- f) Napišite jednadžbu kružnice zadane s $x^2 + y^2 = 8$ u polarnom koordinatnom sustavu.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

Zadatak 3. (2+3+2 bodova)Dani su pravac p i ravnina π

$$p \dots \frac{x-3}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \quad \pi \dots x - 2y = 4.$$

- a) Odredite ravninu paralelnu ravnini π koja sadrži pravac p .
- b) Odredite pravac q koji je ortogonalna projekcija pravca p na ravninu π .
- c) Odredite udaljenost pravaca p i q .

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

Zadatak 4. (3+4 bodova)

- a) Odredite jednadžbu hiperbole s fokusima $F_1 = (2 - 3\sqrt{10}, 3)$ i $F_2 = (2 + 3\sqrt{10}, 3)$ i asimptotama $y = 3x - 3$ i $y = -3x + 9$.
- b) Zadane su točke $A = (0, -1)$ i $B = (0, 1)$. Odredite geometrijsko mjesto točaka T za koje vrijedi $|TB| = \sqrt{2}|TA|$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Drugi kolokvij – 8. veljače 2023.

Zadatak 5. (6 bodova)

Odredite kut (dovoljno je odrediti tangens kuta) između tangenti parabole $y^2 = 8x$ u točkama njezinog presjeka s pravcem $2x - y - 8 = 0$.