

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Popravni kolokvij – 23. veljače 2023.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Dozvoljeno je koristiti kalkulator i službene šalabahtere.

Zadatak 1. ($8 + 2 + 6 + 6 + 2 = 24$ boda)

- (a) Definirajte komplanarnost vektora. Napišite koordinate neka tri komplanarna vektora iz V^3 . Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ komplanarni vektori takvi da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni. Dokažite da se $\vec{c}$ tada može zapisati kao njihova linearna kombinacija.
- (b) Izračunajte apsolutnu vrijednost skalarnog produkta vektora $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ ako oni zadovoljavaju $|\vec{a}| = |3\vec{b}| = 1$ te je njihov vektorski produkt jednak nulvektoru.
- (c) Definirajte bazu u V^3 . Pretpostavimo da vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ čine bazu prostora V^3 . Precizno napišite koje sve uvjete takvi vektori moraju zadovoljavati da bi $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ bila desno orijentirana ortonormirana baza. Neka su dani vektori $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ i $\vec{v} = (0, 1, 0)$. Odredite neki vektor $\vec{w}$ takav da $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ bude lijevo orijentirana ortonormirana baza.
- (d) Izračunajte udaljenost ishodišta od pravca p zadanog jednačbom

$$p \dots \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}.$$

Napišite formulu za udaljenost mimosmjernih pravaca te potom odredite udaljenost pravca p od z -osi.

- (e) Napišite jednačbzu neke ravnine koja je paralelna x -osi te ne prolazi ishodištem.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Popravni kolokvij – 23. veljače 2023.

Zadatak 2. ($2 + 4 + 4 + 2 = 12$ bodova)

(a) Točka A ima pravokutne koordinate $A = (1, 1)$, a točka B ima polarne koordinate $B = (3, 3\pi/2)$. Napišite polarne koordinate od A te pravokutne koordinate od B .

(b) Odredite tip krivulje drugog reda zadane jednačbom

$$2x^2 - y^2 - 4x - y - 100 = 0.$$

(c) Iskažite i dokažite zrcalno svojstvo hiperbole.

(d) Napišite središnju (kanonsku) jednačbu hiperbole čija su tjemena u točkama $(\pm 1, 0)$ te su joj asimptote pravci $y = \pm 2x$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Popravni kolokvij – 23. veljače 2023.

Zadatak 3. (9 + 3 = 12 bodova)

Zadan je trokut ABC . Neka je točka P polovište dužine $\overline{AB}$. Neka je točka D na dužini $\overline{CP}$ takva da vrijedi $\overrightarrow{CD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CP}$. Neka je točka E presjek pravaca AC i BD .

- Odredite u kojem omjeru točka E dijeli dužinu $\overline{AC}$.
- Odredite omjer površina trokuta EDC i trokuta ABC .

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Popravni kolokvij – 23. veljače 2023.

Zadatak 4. ($3 + 6 + 3 = 12$ bodova)Zadane su točke $A = (-1, 3, 2)$, $B = (-1, 1, 0)$, $C = (1, 4, 0)$, $D = (3, 2, 1)$ i $E = (1, 4, 3)$.

- a) Pokažite da su vrhovi A , B , C i D nekomplanarni.
- b) Odredite nožište okomice iz vrha C na dužinu $\overline{DE}$.
- c) Izračunajte volumen tetraedra $ABCD$.

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Popravni kolokvij – 23. veljače 2023.

Zadatak 5. ($2 + 3 + 7 = 12$ bodova)

- a) Odredite kanonsku jednadžbu pravca p_1 koji prolazi ishodištem i okomit je na ravninu $2z = x + y + 2$.
- b) Odredite kanonsku jednadžbu pravca p_2 koji prolazi točkom $(-4, 5, 0)$ i paralelan je s ravninama $2x + y + z = 20$ i $4x - y - 2z = 23$.
- c) Odredite točku koja je simetrična točki $T = (11, 9, 7)$ s obzirom na ravninu razapetu pravcima p_1 i p_2 .

ANALITIČKA GEOMETRIJA

Popravni kolokvij – 23. veljače 2023.

Zadatak 6. (4 + 4 = 8 bodova)

Zadani su parabola i pravac:

$$k \dots y^2 = \frac{8}{3}x, \quad p \dots 4x - 3y - 12 = 0.$$

- a) Odredite jednadžbu tangente t na danu parabolu paralelnu pravcu p .
- b) Odredite točku dirališta T dobivene tangente i dane parabole.