Analitička geometrija

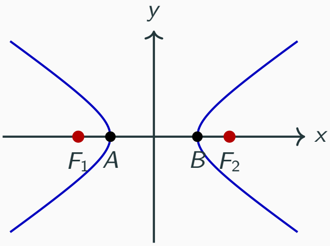
Definicija hiperbole

Definicija

Neka su F_1, F_2 dvije čvrste točke u ravnini E^2 udaljene za $2e > 0$ i neka je a zadani pozitivan realan broj, $a < e$. Hiperbola je skup točaka u E^2 za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od F_1 i F_2 konstantna i jednaka $2a$:

$$\mathcal{H} = \{T \in E^2 : |\,\mathrm{d}(T, F_1) - \mathrm{d}(T, F_2)| = 2a\}.$$

Točke F_1, F_2 zovu se žarišta ili fokusi hiperbole.



Napomena. Koristi se npr. u GPS-u.

Kanonska jednadžba hiperbole

Za fokuse

$$F_1 = (-e, 0), \qquad F_2 = (e, 0)$$

kanonska jednadžba hiperbole glasi

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad b^2 = e^2 - a^2.$$

Iz jednadžbe slijedi

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},$$

pa je hiperbola neograničena krivulja s dvije grane i nema točaka za $|x| < a$.

Elementi hiperbole i asimptote

Za hiperbolu

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

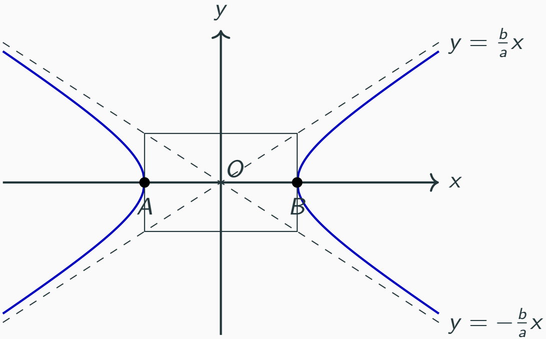
vrijedi:

- tjemena su $A = (-a, 0)$ i $B = (a, 0)$ i to su presjeci hiperbole i $x-$osi;
- AB je realna os;
- CD, gdje su $C = (0, b)$ i $D = (0, -b)$, jest imaginarna os;
- linearni ekscentricitet je $e = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- numerički ekscentricitet je $\varepsilon = e/a > 1$.

Asimptote hiperbole su

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

Hiperbola s asimptotama



Asimptote opisuju smjerove kojima se grane hiperbole sve više približavaju kada $|x| \to \infty$.

Hiperbola asimptote

Uvjerimo se da su dane jednadžbe zaista jednadžbe asimptota. Naime, pokazat ćemo da se točka T_1 hiperbole yaista sve više približava pravcu $p ... y = \frac{b}{a} x$ kada x teži u beskonačnost.

$$d(T_1, p) = \frac{\left| b x_1 - ab\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} - 1} \right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left| x_1 - \sqrt{x_1^2 - a^2} \right|$$

$$= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left| \frac{x_1^2 - (x_1^2 - a^2)}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}} \right|$$

$$= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \frac{a^2}{x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}},$$

što doista teži u 0 kada x teži u beskonačnost.

Tangenta hiperbole

Pravac i hiperbola mogu imati dvije, jednu ili niti jednu zajedničku točku.

Pravac $y = kx + l$ je tangenta hiperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ako i samo ako vrijedi

$$k^2 a^2 - b^2 = l^2.$$

Ako je $D_1 = (x_1, y_1)$ točka hiperbole, tangenta u toj točki glasi

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1.$$

Napomena. Postoje pravci koji imaju jednu zajedničku točku s hiperbolom, ali ne zovemo ih tangentama.

Hiperbola

Primijetimo da za hiperbolu, asimptote možemo definirati ekvivalentno kao pravce koji su granični položaji tangente kada se diralište tangente giba po grani hiperbole prema beskonačnosti. Odredimo jednadžbe asimptota iz prethodnog opisa tangente. Tangenta dira hiperbolu u točki s koordinatama

$$x_1 = \frac{a^2 kl}{b^2 - a^2 k^2}, \qquad y_1 = \frac{b^2 l}{b^2 - a^2 k^2}.$$

Diralište je *beskonačno daleka točka* hiperbole ako i samo ako je

$$b^2 - a^2 k^2 = 0,$$

odakle slijedi

$$k = \pm \frac{b}{a}.$$

Uvjet dodira povlači da je tada $l = 0$, pa su jednadžbe asimptota

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Direktrise i polarna jednadžba hiperbole

Direktrisa ili ravnalica hiperbole je pravac p za koji vrijedi da je za svaku točku T hiperbole omjer

$$\frac{d(T, f)}{d(T, p)}$$

konstantan realan broj $c > 0$. Hiperbola ima dvije direktrise

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{e}.$$

Pappus-Boškovićeva karakterizacija za hiperbolu glasi: neka je F čvrsta točka i p čvrsti pravac u ravnini E^2. Skup točaka T u E^2 koje zadovoljavaju uvjet

$$\frac{\mathrm{d}(T, F)}{\mathrm{d}(T, p)} = \varepsilon, \qquad \varepsilon > 1$$

je hiperbola.

Kao i kod elipse, možemo gledati tetivu kroz fokus paralelnu direktrisi duljine $2p$ (*latus rectum*). Možemo definirati polarni koordinatni sustav s tim fokusom kao polom te realnom osi kao polarnom osi. Tada je polarna jednadžba hiperbole.

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}, \qquad \varepsilon > 1.$$

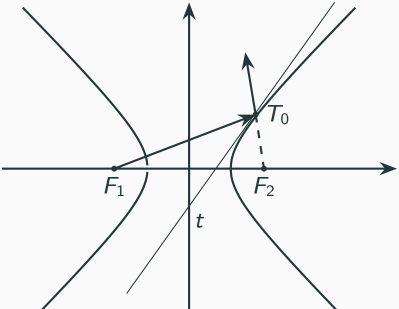
Zrcalno svojstvo hiperbole

Teorem 21
Ako zraka svjetlosti izlazi iz jednog fokusa i reflektira se od hiperbole, tada reflektirana zraka izgleda kao da izlazi iz drugog fokusa.

Ekvivalentno:

Teorem 22
Neka je T_0 točka hiperbole i neka je t tangenta hiperbole u točki T_0. Tada su kutovi koje zatvaraju spojnice F_1T_0, F_2T_0 s tangentom t jednaki.

Teorem 23
Neka je T_0 točka hiperbole i neka je t tangenta hiperbole u točki T_0. Tada tangenta t raspolavlja unutrašnji kut između spojnica F_1T_0 i F_2T_0.



3.5 Parabola

Definicija parabole

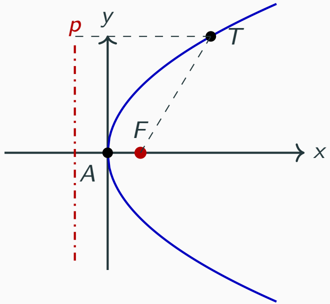
Definicija

Neka je p čvrsti pravac i F čvrsta točka u E^2 koja ne pripada pravcu p. Parabola je skup točaka u E^2 jednako udaljenih od pravca p i točke F:

$$\mathcal{P} = \{T \in E^2 : \mathrm{d}(T, F) = \mathrm{d}(T, p)\}.$$

Pravac p zove se ravnalica ili direktrisa, a točka F žarište ili fokus parabole.

Ovo je odmah i Pappus-Boškovićeva karakterizacija uz $\varepsilon = 1$.



Napomena. Npr. paraboličke antene, kosi hitac itd.

Tjeme, os i kanonska jednadžba parabole

Neka je N nožište okomice iz F na direktrisu p. Tjeme parabole je polovište dužine FN, a os parabole je pravac kroz F okomit na direktrisu.

Neka je ishodište pravokutnog koordinatnog sustava u A, a x–os neka se podudara s osi parabole. Neka je p parametar parabole, tj. polovina duljine tetive koja prolazi fokusom i koja je paralelna s direktrisom (*latus rectum*). Krajnje točke te tetive, kao točke parabole, udaljene su jednako od fokusa F i od direktrise p i ta je udaljenost jednaka p.

Dakle,

$$F = \left(\frac{p}{2}, 0\right), \qquad \text{direktrisa: } x = -\frac{p}{2}.$$

Za $T = (x, y)$ uvjet $\mathrm{d}(T, F) = \mathrm{d}(T, p)$ daje

$$y^2 = 2px.$$

Kanonska jednadžba parabole

Vrijedi i obratno, točke koje zadovoljavaju gornju jednadžbu su točke parabole. Neka je $T(x, y)$ točka ravnine E^2 takva da vrijedi $y^2 = 2px$. Računamo:

$$\begin{aligned} d(T, F) &= \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \\ &= \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px} \\ &= \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \\ &= x + \frac{p}{2} \\ &= d(T, p), \end{aligned}$$

jer je $x \geq 0$. Sada gornju jednadžbu možemo zvati kanonska ili tjemena jednadžba parabole. Iz te jednadžbe slijedi da je y definiran za sve $x \geq 0$, te da je parabola neograničena krivulja.

Tangenta parabole

Pravac i parabola mogu imati dvije, jednu ili nijednu zajedničku točku. Za parabolu

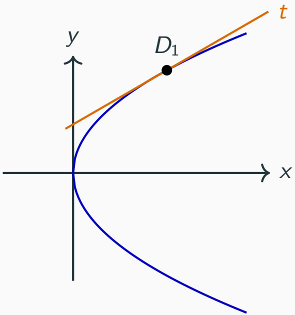
$$y^2 = 2px$$

pravac $y = kx + l$ je tangenta ako vrijedi

$$p = 2kl.$$

Ako je $D_1 = (x_1, y_1)$ točka parabole, tangenta u toj točki glasi

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

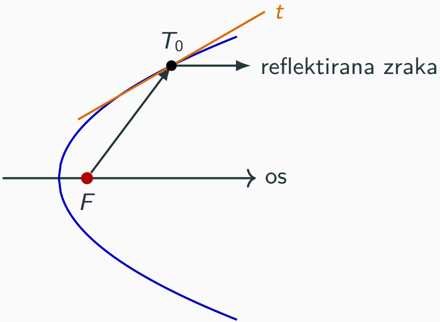


Zrcalno svojstvo parabole

Teorem 24
Ako zraka svjetlosti izlazi iz fokusa i reflektira se od parabole, tada je reflektirana zraka paralelna s osi parabole, i obrnuto.

Ekvivalentno:

Teorem 25
Neka je T_0 točka parabole i t tangenta parabole u T_0. Tada je kut što ga tangenta t zatvara sa spojnicom FT_0 jednak kutu što ga tangenta zatvara s osi parabole.



Dokaz zrcalnog svojstva parabole

Dokaz.
Označimo s T točku presjeka tangente t i osi parabole. Sada je dovoljno pokazati da je trokut $\triangle T_0TF$ jednakokračan s krakovima $\overline{T_0F}$ i $\overline{TF}$.

Budući da je T_0 točka na paraboli, koorinate su joj $T_0(\frac{y_0^2}{2p}, y_0)$.

Također, jednadžba tangente t je tada $yy_0 = p(x + x_0)$ te je njezin presjek s $x-$osi $T = (-x_0, 0)$.

Dakle, $d(T, F) = \frac{p}{2} + x_0$ te

$$d(T_0, F) = \sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2} = \sqrt{\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2}.$$

$\square$

Konusni presjeci

Elipsu, hiperbolu i parabolu dobivamo i kao presjeke uspravnog kružnog stošca ravninom. Takvi presjeci zovu se konusni presjeci.

Izvodnica stošca je dužina koja povezuje vrh stošca s nekom točkom na rubu baze stošca.

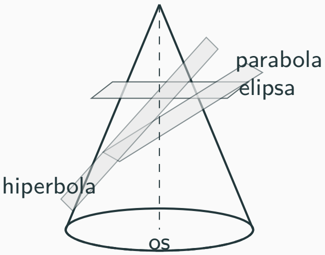
Degenerirani presjeci
Ako presječna ravnina prolazi vrhom stošca, dobivamo:

- vrh stošca, tj. točku;
- jednu izvodnicu, ako je ravnina tangencijalna;
- dvije izvodnice.

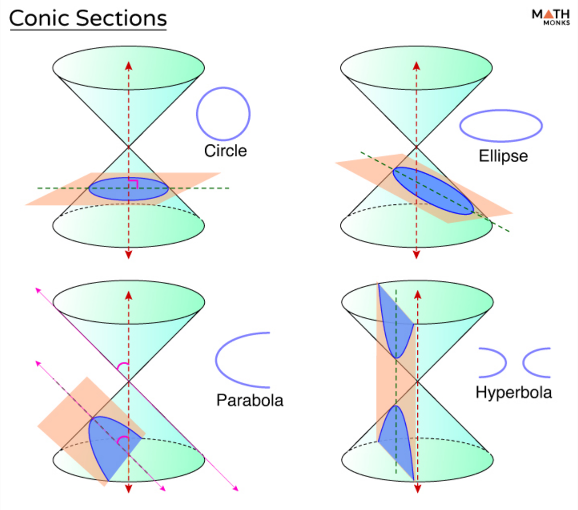
Nedegenerirani konusni presjeci

Nedegenerirani konusni presjeci su:

- elipsa: ravnina siječe sve izvodnice; posebno, ako je ravnina okomita na os stošca, presjek je kružnica;
- parabola: ravnina je paralelna s jednom izvodnicom;
- hiperbola: ravnina je paralelna s dvije izvodnice.



Konusni presjeci



Izvor: https://mathmonks.com/cone/conic-sections.

Konike i Pappus-Boškovićeva karakterizacija

Nedegenerirani konusni presjeci zovu se konike.

Teorem 26
Neka je K krivulja dobivena kao presjek uspravnog kružnog stošca i ravnine. Tada u toj ravnini postoji točka F i pravac p takvi da je omjer

$$\frac{\mathrm{d}(T, F)}{\mathrm{d}(T, p)}$$

konstantan za svaku točku $T \in K$.

Prema vrijednosti konstante ε dobivamo:

$$\varepsilon < 1 \Rightarrow \text{elipsa}, \qquad \varepsilon = 1 \Rightarrow \text{parabola}, \qquad \varepsilon > 1 \Rightarrow \text{hiperbola}.$$