

# Elementarna matematika 2

predavanja

---

Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO

# Analitička geometrija

---

- Uz  $\vec{a} = [\overrightarrow{T_0 T_1}] = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ , tj.  $T_1(x_1, y_1, z_1)$  i  $\vec{b} = [\overrightarrow{T_0 T_2}] = (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$ , tj.  $T_2(x_2, y_2, z_2)$ , jednadžba ravnine kroz tri točke:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

- Izračunavanjem determinante dobivamo izraz oblika

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (*)$$

za neke  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ . Obratno, pokažimo da je skup svih  $(x, y, z) \in E^3$  za koje vrijedi (\*) jedna ravnina, čim je barem jedan od koeficijenata  $A, B, C \neq 0$ .

## Teorem 3

Neka su  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  takvi da je  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ . Skup svih točaka  $(x, y, z) \in E^3$  takvih da vrijedi  $Ax + By + Cz + D = 0$  je ravnina u  $E^3$ . Ovakav zapis zovemo *opći oblik jednadžbe ravnine*.

**Dokaz.** Bez smanjenja općenitosti, uzmimo  $A \neq 0$  (analogno za  $B \neq 0$  ili  $C \neq 0$ ).

Neka je  $S \subseteq E^3$  skup svih točaka prostora za koje vrijedi uvjet, tj.

$$S = \{(x, y, z) \in E^3 : Ax + By + Cz + D = 0\}.$$

Uočimo da je točka

$$T_0 \left( \frac{-B - C - D}{A}, 1, 1 \right) \in S,$$

uz

$$x_0 = \frac{-B - C - D}{A}, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 1.$$

Stavimo

$$\vec{n} := (A, B, C)$$

i dopunimo  $\{\vec{n}\}$  do ortogonalne baze od  $V^3$ :

$$\{\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}\}.$$

Pokažimo da je  $S = \pi(T_0, \vec{a}, \vec{b})$ , tj. da je  $S$  ravnina koja prolazi točkom  $T_0$ , razapeta vektorima  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

# Ravnina u $E^3$

$\square$  Neka je  $T(x, y, z) \in S$ . Tvrdimo da je

$$T \in \pi(T_0, \vec{a}, \vec{b}).$$

Budući da

$$T \in S \implies Ax + By + Cz + D = 0$$

i

$$T_0 \in S \implies Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

oduzimanjem dobivamo

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

odnosno

$$\vec{n} \cdot [\overrightarrow{T_0 T}] = 0.$$

Prikažimo  $[\overrightarrow{T_0 T}]$  u bazi  $\{\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}\}$ . Postoje  $\gamma, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  takvi da je

$$[\overrightarrow{T_0 T}] = \gamma \vec{n} + \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Tada

$$0 = [\overrightarrow{T_0 T}] \cdot \vec{n} = \gamma \vec{n} \cdot \vec{n} + \alpha \vec{a} \cdot \vec{n} + \beta \vec{b} \cdot \vec{n}.$$

Kako je  $\{\vec{n}, \vec{a}, \vec{b}\}$  ortogonalna baza, vrijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{b} \cdot \vec{n} = 0.$$

Zato je

$$0 = \gamma \|\vec{n}\|^2.$$

## Ravnina u $E^3$

Budući da je  $\vec{n} \neq \vec{0}$ , slijedi da je  $\gamma = 0$ . Dakle,

$$[\overrightarrow{T_0 T}] = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b},$$

pa je

$$T \in \pi(T_0, \vec{a}, \vec{b}).$$

$\square$  Neka je  $T \in \pi(T_0, \vec{a}, \vec{b})$ ,  $T = (x, y, z)$ . Tvrdimo da je  $T \in S$ .

Tada za neke  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$[\overrightarrow{T_0 T}] = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Stoga

$$[\overrightarrow{T_0 T}] \cdot \vec{n} = \alpha \vec{a} \cdot \vec{n} + \beta \vec{b} \cdot \vec{n} = 0 + 0 = 0.$$

Dakle,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Odavde slijedi

$$Ax + By + Cz + D = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

jer je  $T_0 \in S$ . Prema tome,

$$T(x, y, z) \in S.$$

Zaključujemo:

$$S = \pi(T_0, \vec{a}, \vec{b}).$$

$\square$

Uočimo, ako ravnina  $\pi$  ima jednadžbu  $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ , onda iz dokaza vidimo da vrijedi

$$T_1, T_2 \in \pi \iff [\overrightarrow{T_1 T_2}] \perp \vec{n},$$

za

$$\vec{n} = (A, B, C).$$

Vektor  $\vec{n}$  zovemo **vektor normale** ravnine  $\pi$ .

Također, za  $T(x, y, z) \in \pi$  vrijedi

$$\vec{r}_T \cdot \vec{n} + D = Ax + By + Cz + D = 0. \quad (*)$$

Nadalje, ako vrijedi  $Ax + By + Cz + D = 0$ , onda za svaki  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + \lambda D = 0.$$

Dakle, opći oblik jednadžbe ravnine nije jedinstven.

Uočimo, vektori normale  $(A, B, C)$  i  $(\lambda A, \lambda B, \lambda C)$  su kolinearni.

Često odabiremo jedinični vektor normale.

# Udaljenost točke od ravnine u $E^3$

## Definicija

Udaljenost točke  $T$  od ravnine  $\pi$  definira se kao

$$d(T, \pi) = \inf_{X \in \pi} d(T, X).$$

## Teorem 4

Neka je ravnina  $\pi$  zadana s

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

te neka je točka

$$T_0(x_0, y_0, z_0) \in E^3.$$

Tada je

$$d(T_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

# Udaljenost točke od ravnine u $E^3$

Dokaz.

Neka je

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

vektor normale od  $\pi$  i neka je  $T_\pi$  sjecište ravnine  $\pi$  i pravca kroz  $T_0$  paralelnog sa  $\vec{n}$ .

Tada je

$$[\overrightarrow{T_\pi T_0}] \perp [\overrightarrow{T_\pi X}] \quad \text{za sve } X \in \pi,$$

pa je trokut  $\triangle T_0 T_\pi X$  pravokutan.

Stoga vrijedi

$$|\overrightarrow{T_0 T_\pi}| \leq |\overrightarrow{T_0 X}|,$$

pri čemu se jednakost postiže ako i samo ako je  $X = T_\pi$ .

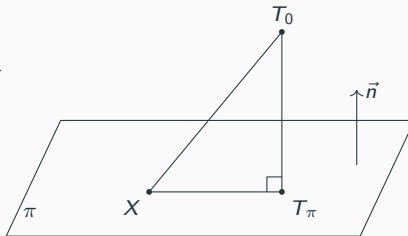
Dakle,

$$d(T_0, \pi) = d(T_0, T_\pi) = |[\overrightarrow{T_\pi T_0}]| = |\alpha \cdot \vec{n}_0| = |\alpha|,$$

pri čemu je

$$\vec{n}_0 = \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)$$

normirani vektor normale.



# Udaljenost točke od ravnine u $E^3$

Odredimo  $\alpha$ . Neka je

$$T_\pi = (x_\pi, y_\pi, z_\pi) \in \pi.$$

Tada

$$[\overrightarrow{T_\pi T_0}] = (x_0 - x_\pi, y_0 - y_\pi, z_0 - z_\pi) = \alpha \cdot \vec{n}_0.$$

Budući da je  $\vec{n}_0$  jediničan,

$$[\overrightarrow{T_\pi T_0}] \cdot \vec{n}_0 = \alpha \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_0 = \alpha, .$$

Dakle,

$$\alpha = -\overrightarrow{T_\pi \vec{O}} \cdot \vec{n}_0 + \overrightarrow{T_0 \vec{O}} \cdot \vec{n}_0.$$

Budući da je

$$\overrightarrow{T_\pi \vec{O}} \cdot \vec{n}_0 = \frac{Ax_\pi + By_\pi + Cz_\pi}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

jer je  $T_\pi \in \pi$ , te

$$\overrightarrow{T_0 \vec{O}} \cdot \vec{n}_0 = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

dobivamo

$$\alpha = -\left(-\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right) + \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Stoga

$$d(T_0, \pi) = |\alpha| = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

# Udaljenost točke od ravnine u $E^3$

Uočimo, predznak od  $\alpha$  ovisi o tome jesu li  $\overrightarrow{T_\pi T_0}$  i  $\vec{n}_0$  iste orijentacije.

Udaljenost ishodišta od ravnine  $\pi$  je

$$\frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Predznak od  $D$  je  $> 0$  ako vektor normale pokazuje prema ishodištu, a  $< 0$  ako pokazuje u suprotnom smjeru.

Podijelimo opći oblik jednadžbe ravnine sa

$$-\text{sign}(D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}, \quad \text{sign}(D) \in \{\pm 1\}.$$

Tada dobivamo

$$\begin{aligned} & -\frac{A}{\text{sign}(D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x - \frac{B}{\text{sign}(D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y \\ & -\frac{C}{\text{sign}(D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z - \frac{D}{\text{sign}(D)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0. \end{aligned}$$

Pišemo

$$\cos \alpha \cdot x + \cos \beta \cdot y + \cos \gamma \cdot z - \delta = 0,$$

što zovemo **Hesseov** ili **normalni oblik jednadžbe ravnine**.

## Udaljenost točke od ravnine u $E^3$

Uočimo:

$$\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

je jedinični vektor normale, a  $\alpha, \beta, \gamma$  su kutovi koje  $\vec{n}$  zatvara redom s  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

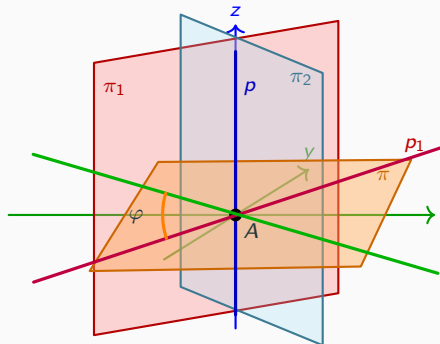
Također,

$$\delta \geq 0$$

je udaljenost ravnine od ishodišta.

Kako definirati (i izračunati) kut među ravninama?

# Kut između dviju ravnina



## Definicija

Neka su dane ravnine  $\pi_1$  i  $\pi_2$  čiji je presjek pravac  $p$ .

Neka je  $A \in p$  proizvoljna točka, te  $\pi$  ravnina okomita na pravac  $p$  koja prolazi kroz  $A$ .

Neka je

$$p_1 := \pi_1 \cap \pi, \quad p_2 := \pi_2 \cap \pi.$$

**Kut među ravninama**  $\pi_1$  i  $\pi_2$  definira se kao manji od kutova koje zatvaraju pravci  $p_1$  i  $p_2$ .

Oznaka:

$$\varphi(\pi_1, \pi_2).$$

Ako se ravnine ne sijeku, kažemo da su **paralelne**.

## Kut između dviju ravnina

**Napomena.** Neka su  $\vec{p}$ ,  $\vec{p}_1$  i  $\vec{p}_2$  jedinični vektori u smjeru pravaca  $p$ ,  $p_1$  i  $p_2$  redom, a  $\vec{n}_1$  i  $\vec{n}_2$  jedinični vektori normale za  $\pi_1$  i  $\pi_2$ .

Tada je

$$\cos \varphi = |\cos \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_2)| = |\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2|.$$

Budući da  $\{\vec{p}_1, \vec{n}_1, \vec{p}\}$  i  $\{\vec{p}_2, \vec{n}_2, \vec{p}\}$  čine ortonormiranu bazu,

$$\vec{p}_1 = \pm (\vec{p} \times \vec{n}_1), \quad \vec{p}_2 = \pm (\vec{p} \times \vec{n}_2),$$

slijedi

$$|\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2| = |(\vec{p} \times \vec{n}_1) \cdot (\vec{p} \times \vec{n}_2)|.$$

Može se pokazati (preko determinanti matrica) da vrijedi

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Zato je

$$|(\vec{p} \times \vec{n}_1) \cdot (\vec{p} \times \vec{n}_2)| = |(\vec{p} \cdot \vec{p})(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) - (\vec{p} \cdot \vec{n}_2)(\vec{n}_1 \cdot \vec{p})|.$$

Kako je  $\vec{p} \perp \vec{n}_1$ ,  $\vec{p} \perp \vec{n}_2$  i  $|\vec{p}| = 1$ , slijedi

$$\cos \varphi = |\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = |\cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|.$$

Dakle, kut koji zatvaraju ravnine jednak je manjem od kutova koje zatvaraju vektori njihovih normala.

# Kut između dviju ravnina

## Propozicija 5

Ako su

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

onda je

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

## Dokaz.

Jedinični vektori normale su

$$\vec{n}_1 = \frac{(A_1, B_1, C_1)}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \quad \vec{n}_2 = \frac{(A_2, B_2, C_2)}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Uvrstimo u formulu

$$\cos \angle(\pi_1, \pi_2) = |\cos \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|.$$

□

Neka je  $p$  proizvoljan pravac, te  $T_0, T_1 \in p$ . Stavimo

$$\vec{a} = \overrightarrow{T_0 T_1}.$$

Očito za bilo koji  $X \in p$  su  $T_0, T_1, X$  kolinearne, pa postoji

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

tako da

$$\overrightarrow{T_0 X} = \alpha \vec{a}.$$

Neka je  $O$  ishodište koordinatnog sustava u  $E^3$ . Tada je

$$\vec{r}_X - \vec{r}_{T_0} = \alpha \vec{a}$$

pa je

$$X \in p \iff \vec{r}_X = \vec{r}_{T_0} + \alpha \vec{a}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

što je **vektorski parametarski oblik jednadžbe pravca**.

Ako uvedemo koordinatni zapis

$$T_0(x_0, y_0, z_0), \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad X(x, y, z),$$

onda:

$$X \in p \iff \begin{cases} x = x_0 + \alpha a_x, \\ y = y_0 + \alpha a_y, \\ z = z_0 + \alpha a_z, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

To su **parametarske jednačbe pravca**.

Budući da je  $\vec{r}_X - \vec{r}_{T_0}$  kolinearan s  $\vec{a}$ , vrijedi

$$(\vec{r}_X - \vec{r}_{T_0}) \times \vec{a} = \vec{0}$$

što je **vektorski oblik normalne jednačbe pravca**.

Sada je

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{0},$$

tj.

$$\begin{aligned} & (a_z(y - y_0) - a_y(z - z_0))\vec{i} \\ & - (a_z(x - x_0) - a_x(z - z_0))\vec{j} \\ & + (a_y(x - x_0) - a_x(y - y_0))\vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Dakle:

$$\begin{cases} a_z(y - y_0) = a_y(z - z_0), \\ a_z(x - x_0) = a_x(z - z_0), \\ a_y(x - x_0) = a_x(y - y_0). \end{cases}$$

Iz parametarskih jednađbi dobivamo **kanonsku** ili **normalnu jednađbu pravca**.

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}$$

Neka pravac  $p$  prolazi kroz točke  $T_1(x_1, y_1, z_1)$  i  $T_2(x_2, y_2, z_2)$ .

Pravac ima smjer

$$\vec{a} = \overrightarrow{T_1 T_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Zato u gornje formule uvrstimo

$$\vec{a} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Dobivamo **vektorski parametarski oblik jednadžbe pravca kroz dvije točke:**

$$X \in p \iff \vec{r}_X = \vec{r}_1 + \alpha(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Odnosno:

$$\vec{r}_X = (1 - \alpha)\vec{r}_1 + \alpha\vec{r}_2.$$

**Parametarske jednadžbe pravca kroz dvije točke:**

$$\begin{cases} x = (1 - \alpha)x_1 + \alpha x_2, \\ y = (1 - \alpha)y_1 + \alpha y_2, \\ z = (1 - \alpha)z_1 + \alpha z_2, \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Kanonske jednadžbe pravca kroz dvije točke:**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Neka je pravac  $p$  presjek ravnina  $\pi_1$  i  $\pi_2$ ,

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Tada su **opće jednačbe pravca**:

$$p : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Sve točke koje zadovoljavaju obje jednačbe, i samo one, pripadaju pravcu  $p$ .

Da bi presjek ravnina postojao i bio pravac, njihove normale ne smiju biti kolinearne, tj.

$$\frac{A_1}{A_2}, \quad \frac{B_1}{B_2}, \quad \frac{C_1}{C_2}$$

ne smiju sve biti iste.

Ekvivalentno,

$$(A_1, B_1, C_1) \text{ i } (A_2, B_2, C_2)$$

ne smiju biti kolinearni vektori.

## Kut između pravaca u $E^3$

Već smo definirali kut između pravaca  $p_1$  i  $p_2$  koji leže u istoj ravnini. No, što ako su pravci mimosmjerni?

U tom slučaju, naći ćemo njima paralelne pravce  $q_1$  i  $q_2$  koji se sijeku.

### Definicija

*Kut između pravaca  $p_1$  i  $p_2$  u  $E^3$  je manji od dva suplementarna kuta koja zatvaraju pravci  $q_1$  i  $q_2$ , takvi da*

$$q_1 \parallel p_1, \quad q_2 \parallel p_2, \quad q_1 \cap q_2 \neq \emptyset.$$

Oznaka:

$$\sphericalangle(p_1, p_2).$$

Po definiciji vrijedi

$$\sphericalangle(p_1, p_2) \leq \frac{\pi}{2}.$$

## Kut između pravaca u $E^3$

### Propozicija 6

Neka je  $p_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + \alpha \vec{a}$ ,  $p_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + \beta \vec{b}$ , gdje su

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \vec{b} = (b_x, b_y, b_z).$$

Tada vrijedi

$$\cos \angle(p_1, p_2) = \frac{|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

### Dokaz.

Očito vrijedi

$$\cos \angle(p_1, p_2) = \left| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) \right| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{|a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$



## Kut između pravaca u $E^3$

Uočimo, pravci su okomiti ako vrijedi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

tj.

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

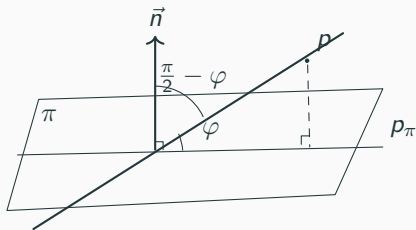
Pravci su paralelni ako postoji  $\lambda \in \mathbb{R}$  takav da

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}.$$

Odnosno:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

## Kut između pravca i ravnine



**Def.** Kut  $\angle(p, \pi)$  između pravca  $p$  i ravnine  $\pi$  je kut između pravca  $p$  i njegove ortogonalne projekcije (u oznaci  $p_\pi$ ) na  $\pi$ .

Jasno,

$$\angle(p, \pi) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ako je ortogonalna projekcija od  $p$  na  $\pi$  točka, stavljamo

$$\angle(p, \pi) := \frac{\pi}{2}.$$

# Kut između pravca i ravnine

## Propozicija 7

Neka je  $p$  pravac dan jednačbom

$$p \dots \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad \vec{a} = (\alpha, \beta, \gamma),$$

a  $\pi$  ravnina dana jednačbom

$$\pi \dots Ax + By + Cz + D = 0.$$

Tada za kut  $\varphi = \angle(p, \pi)$  vrijedi

$$\sin \varphi = \frac{|\alpha A + \beta B + \gamma C|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

**Dokaz.**

$$\sin \varphi = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \angle(\vec{a}, \vec{n}) = \frac{|\alpha A + \beta B + \gamma C|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

gdje je

$$\vec{n} = (A, B, C)$$

vektor normale ravnine  $\pi$ .



**Napomena.** Pravac  $p$  i ravnina  $\pi$  su paralelni ako

$$\angle(p, \pi) = 0,$$

tj.

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = 0.$$

Pravac  $p$  i ravnina  $\pi$  su okomiti ako

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{C},$$

tj. smjer pravca jednak je smjeru normale ravnine.