

# Analitička geometrija

---

- prezentacija po skripti Analitička geometrija, Željka Milin Šipuš, Mea Bombardelli

## Krivulje drugog reda u $\mathbb{R}^2$

Promotrimo opći polinom 2. stupnja u varijablama  $x$  i  $y$

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f, \quad (\Delta)$$

gdje su  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$  i bar jedan od koeficijenata  $a, b, c$  nije 0. Skup

$$\mathcal{K} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$$

nazivamo **krivuljom 2. reda**.

- npr. kružnica, elipsa, hiperbola, parabola
- pokazat ćemo da su to jedine nedegenerirane krivulje drugog reda
- ideja: uvesti novi Kartezijev koordinatni sustav u kojem ćemo lakše prepoznati kaonsku jednadžbu
- najprije promatramo rotaciju koordinatnog sustava za kut  $\varphi$  u pozitivnom smjeru

## Polinom u rotiranom sustavu

Označimo sa  $x, y$  osi polaznog sustava, a sa  $x', y'$  osi rotiranog sustava.

U novim koordinatama polinom  $f$  glasi

$$f(x', y') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f',$$

gdje su

$$a' = a \cos^2 \varphi + c \sin^2 \varphi + b \sin 2\varphi,$$

$$b' = (c - a) \cos \varphi \sin \varphi + b(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2}(c - a) \sin 2\varphi + b \cos 2\varphi,$$

$$c' = a \sin^2 \varphi + c \cos^2 \varphi - b \sin 2\varphi,$$

$$d' = d \cos \varphi + e \sin \varphi,$$

$$e' = -d \sin \varphi + e \cos \varphi,$$

$$f' = f.$$

## Poništavanje mješovitog člana

Kut rotacije  $\varphi$  izabrat ćemo tako da se član  $b'$  u pripadnom polinomu poništava. Dakle, iz  $b' = 0$  dobivamo

$$\operatorname{ctg}(2\varphi) = \frac{a - c}{2b}.$$

Sada polinom  $f$  glasi

$$f(x', y') = a'x'^2 + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f'. \quad (\star)$$

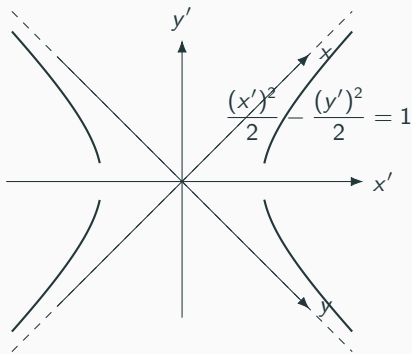
Pokušajmo nadalje eliminirati koeficijente uz  $x'$  i  $y'$ ; to je zapravo postupak svođenja izraza na puni kvadrat u svakoj varijabli.

## Rotirana hiperbola: primjer

Ako se sustav rotira za  $\pi/4$ , krivulja  $xy = 1$  prelazi u

$$\frac{(x')^2}{2} - \frac{(y')^2}{2} = 1.$$

Uočavamo da je ta krivulja hiperbola.



## Translacija sustava

Translatirajmo koordinatni sustav za vektor  $(v, w)$ . Označimo sa  $x'', y''$  nove koordinate. U novim koordinatama dobivamo

$$\begin{aligned} f(x'', y'') &= a'(x'' + v)^2 + c'(y'' + w)^2 + 2d'(x'' + v) + 2e'(y'' + w) + f' \\ &= a''x''^2 + c''y''^2 + 2d''x'' + 2e''y'' + f'', \end{aligned}$$

gdje su

$$a'' = a',$$

$$c'' = c',$$

$$d'' = a'v + d',$$

$$e'' = c'w + e',$$

$$f'' = a'v^2 + c'w^2 + 2d'v + 2e'w + f'.$$

## Slučaj A: $a'c' \neq 0$

Ako su oba  $a'$  i  $c'$  različiti od 0, tj.  $a'c' \neq 0$ , tada  $v$  i  $w$  možemo jednoznačno odrediti iz zahtjeva  $d'' = 0$ ,  $e'' = 0$ :

$$v = -\frac{d'}{a'}, \quad w = -\frac{e'}{c'}.$$

Možemo postići da polinom  $f$  poprma oblik

$$f(x'', y'') = a'x''^2 + c'y''^2 + f''.$$

Proučimo jednadžbu

$$f(x'', y'') = 0.$$

## Slučaj A1: $f'' = 0$

Ako je  $f'' = 0$ , tada jednačba postaje

$$a'x''^2 + c'y''^2 = 0,$$

što predstavlja:

1. točku  $(0, 0)$ , ukoliko su  $a'$  i  $c'$  istog predznaka;
2. par ukrštenih pravaca, ukoliko su  $a'$  i  $c'$  različitih predznaka.

U drugom se slučaju dobiva

$$\frac{y''^2}{x''^2} = -\frac{a'}{c'} > 0,$$

pa su jednačbe pravaca

$$y'' = \pm \sqrt{-\frac{a'}{c'}} x''.$$

Neka je  $f'' \neq 0$  i još od prije  $a'c' \neq 0$ .

1. Ako su oba  $a'$ ,  $c'$  istog predznaka, ali suprotnog od  $f''$ , dobivamo

$$\frac{x'^2}{-\frac{f''}{a'}} + \frac{y'^2}{-\frac{f''}{c'}} = 1,$$

što predstavlja elipsu.

2. Ako su  $a'$ ,  $c'$  različitih predznaka, dobivamo hiperbolu.
3. Ako su  $a'$ ,  $c'$  i  $f''$  istog predznaka, za skup  $\mathcal{K}$  dobivamo prazan skup  $\emptyset$ .

## Invarijante za slučaj A

Može se pokazati da vrijedi:

$$a'c' = ac - b^2.$$

Ako polinomu ( $\Delta$ ) pridružimo determinantu

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2, \quad (3.24)$$

a polinomu ( $\star$ ) determinantu

$$\begin{vmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{vmatrix} = a'c' = ac - b^2, \quad (3.25)$$

tada vrijedi da su te determinante jednake.

## Determinanta $\Delta$ i trag $S$

Slično se može provjeriti da je

$$\Delta := \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & c' & 0 \\ 0 & 0 & f'' \end{vmatrix}.$$

Dakle, u slučaju A1 vrijedi  $\Delta = 0$ ; posebno za točku vrijedi  $\delta > 0$ , odnosno za par ukrštenih pravaca  $\delta < 0$ . U slučaju A2 vrijedi  $\Delta \neq 0$ .

Uvedimo još jednu veličinu

$$S = a + c = \operatorname{tr} \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Za tu se veličinu također može provjeriti da je  $S = a' + c'$ .

## Klasifikacija za $\delta \neq 0$

		krivulja
$\delta > 0$	$\Delta \neq 0, S\Delta < 0$	elipsa
	$\Delta \neq 0, S\Delta > 0$	prazan skup
	$\Delta = 0$	točka
$\delta < 0$	$\Delta \neq 0$	hiperbola
	$\Delta = 0$	par ukrštenih pravaca

- krivulje za koje je  $\delta \neq 0$  zovu se **centralne**
- imaju samo jedan centar ili središte, točku s obzirom na koju su centralnosimetrične
- u nedegeneriranom slučaju, to su elipsa i hiperbola.

## Slučaj B: $\delta = 0$

Ostaje razmotriti situaciju kad je

$$\delta = a'c' = ac - b^2 = 0,$$

dakle kad je jedan od  $a'$ ,  $c'$  jednak 0. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $c' = 0$ . Dakle, imamo

$$f(x', y') = a'x'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f'. \quad (1)$$

Translacijom koordinatnog sustava duž  $x'$ -osi

$$x' = x'' + v, \quad y' = y''$$

dobivamo

$$f(x'', y'') = a''x''^2 + 2d''x'' + 2e''y'' + f''.$$

## Slučaj B nakon translacije

Vrijedi

$$a'' = a', \quad d'' = a'v + d', \quad e'' = e', \quad f'' = a'v^2 + 2d'v + f'.$$

Ako želimo  $d'' = 0$ , tada je

$$v = -\frac{d'}{a'}.$$

Tada  $f''$  postaje

$$f'' = -\frac{d'^2}{a'} + f',$$

i promatrana jednažba skupa  $\mathcal{K}$  glasi

$$f(x'', y'') = a'x''^2 + 2e'y'' + f'' = 0. \quad (2)$$

**B1.** Ako je  $e'' (= e') = 0$ , tada jednačina postaje

$$x''^2 = -\frac{f''}{a'}.$$

U ovisnosti o desnoj strani imamo:

1. dva paralelna pravca;
2. jedan pravac, tj. dvostruki pravac;
3. prazan skup.

**B2.** Ako je  $e'' (= e') \neq 0$ , translacijom sustava možemo postići da slobodni član iščezne. Tada jednačina postaje

$$f(x''', y''') = a'x'''^2 + 2e'''y''' = 0,$$

što predstavlja parabolu.

## Klasifikacija za $\delta = 0$

U slučaju B1 vrijedi  $\Delta = 0$ , dok u slučaju B2 vrijedi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e'' \\ 0 & e'' & 0 \end{vmatrix} = -a'e''^2 \neq 0.$$

Nadalje, uvodimo poluinvarijantu

$$T := d'^2 - f'a' = d^2 + e^2 - (a + c)f,$$

koja se ne mijenja pri rotaciji, ali mijenja pri translaciji. Imamo tablicu:

		<b>krivulja</b>
	$\Delta \neq 0$	parabola
$\delta = 0$	$\Delta = 0$	$T > 0$ : dva paralelna pravca $T = 0$ : jedan dvostruki pravac $T < 0$ : prazan skup

## Definicija

Sfera je skup točaka u prostoru  $E^3$  jednako udaljenih od neke čvrste točke prostora.

Tu čvrstu točku zovemo središtem sfere, a udaljenost od središta do neke točke na sferi **polumjerom** ili **radijusom sfere**.

Izvedimo jednadžbu sfere u Kartezijevom koordinatnom sustavu u prostoru. Neka je  $S = (p, q, r)$  središte sfere,  $R$  njen polumjer. Točka  $T$  je točka sfere ako i samo ako vrijedi

$$d(S, T)^2 = R^2.$$

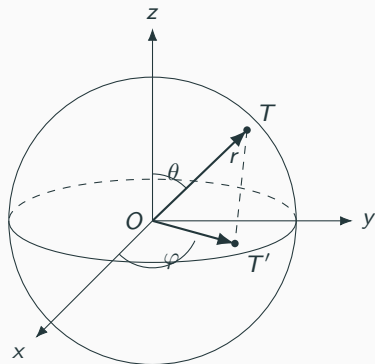
Prema tome, jednadžba sfere glasi

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2 = R^2.$$

# Sferni koordinatni sustav

Sferni koordinatni sustav uvodimo na sljedeći način: neka je  $O$  čvrsta točka u  $E^3$  i  $\pi$  čvrsta ravnina kroz  $O$ . Pravac  $z$  neka je pravac okomit na ravninu  $\pi$  u točki  $O$ , a pravac  $x$  pravac u ravnini  $\pi$  kroz točku  $O$ .

Neka je  $T'$  ortogonalna projekcija točke  $T$  na ravninu  $\pi$ .



# Sferne koordinate

Točku  $T \in E^3$  možemo na jednoznačan način opisati uređenom trojkom

$$T = (r, \varphi, \theta),$$

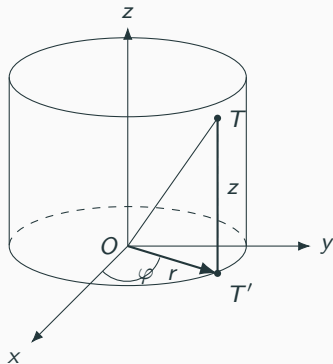
gdje je  $r = d(O, T)$ ,  $\varphi$  kut što ga spojnica  $OT'$  zatvara s pozitivnim dijelom  $x$ -osi,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , a  $\theta$  kut što ga spojnica  $OT$  zatvara s pozitivnim dijelom  $z$ -osi,  $\theta \in [0, \pi]$ .

Uvedemo li Kartezijev sustav kojemu je točka  $O$  ishodište, pravac  $x$  os apscisa, pravac  $z$  os aplikata, a os ordinata  $y$  pravac okomit na  $x$ -os i  $z$ -os, tada vrijede veze:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta, \\r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \cos \theta &= \frac{z}{r}, & \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}.\end{aligned}$$

# Cilindrični koordinatni sustav

Cilindrični koordinatni sustav uvodnimo na sljedeći način: neka je  $O$  čvrsta točka u  $E^3$  i  $\pi$  čvrsta ravnina kroz  $O$ . Pravac  $z$  neka je pravac okomit na ravninu  $\pi$  u točki  $O$ . Neka je u ravnini  $\pi$  s polom u točki  $O$  zadan polarni sustav, te neka je  $T'$  ortogonalna projekcija točke  $T$  na ravninu  $\pi$ .



Točku  $T \in E^3$  možemo na jednoznačan način opisati uređenom trojkom

$$T = (r, \varphi, z),$$

gdje su  $(r, \varphi)$  polarne koordinate točke  $T'$  u ravnini  $\pi$ , a  $z$  pozitivna ili negativna udaljenost točke  $T$  od ravnine  $\pi$ .

Veze između cilindričnog i Kartezijevog sustava kojemu je točka  $O$  ishodište, pravac  $z$  os aplikata, polarna os os apscisa, a os ordinata pravac okomit na polarnu os i  $z$ -os, glase

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi, & z &= z, \\r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}, & z &= z.\end{aligned}$$

## 3.11 Plohe drugog reda (kvadrike) u $\mathbb{R}^3$

Kao i u ravnini možemo odrediti skup točaka u prostoru koji je opisan algebarskom jednačbom 2. stupnja u varijablama  $x, y, z$ .

Promotrimo opći polinom 2. stupnja u varijablama  $x, y, z$ :

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44},$$

gdje su  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i \leq j = 1, \dots, 4$ , i bar jedan od koeficijenata  $a_{ij}$ ,  $i \leq j = 1, \dots, 3$ , nije 0.

Skup

$$\mathcal{K} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = 0\}$$

nazivamo **algebarskom plohom 2. reda**.

## Invarijante algebarske plohe 2. reda

Invarijante algebarske plohe 2. reda su

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{13}^2 - a_{12}^2.$$

Te se veličine ne mijenjaju pri translacijama i rotacijama koordinatnog sustava.

# Centralne plohe

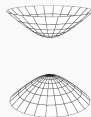
Slučaj  $\delta \neq 0$ .

## Centralne plohe

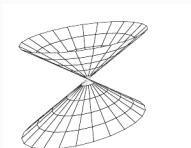
	$S\delta > 0, T > 0$	$S\delta$ i $T$ nisu oba $> 0$
$\Delta < 0$	elipsoid	dvoplošni hiperboloid
$\Delta > 0$	prazan skup	jednoplešni hiperboloid
$\Delta = 0$	točka	konus



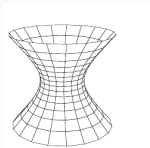
elipsoid



dvoplošni hiperboloid



konus



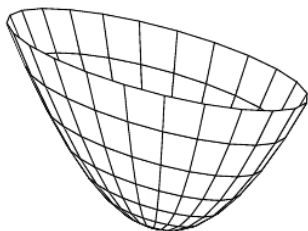
jednoplešni hiperboloid

# Paraboloidi

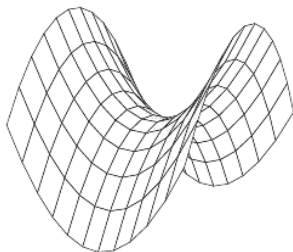
Slučaj  $\delta = 0$ .

## Paraboloidi

	$\Delta < 0 (\Rightarrow T > 0)$	$\Delta > 0 (\Rightarrow T < 0)$
$\Delta \neq 0$	eliptički paraboloid	hiperbolički paraboloid



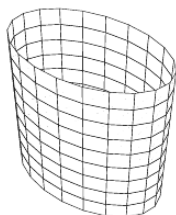
eliptički paraboloid



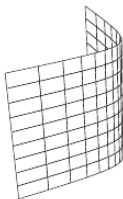
hiperbolički paraboloid

Slučaj  $\delta = 0$ . **Cilindri i ravnine**

$\Delta = 0$	$T > 0$ eliptički cilindar	ili	dvije ravnine
	$T < 0$ hiperbolički cilindar		jedna ravnina
	$T = 0$ parabolički cilindar		prazan skup



eliptički



hiperbolički



parabolički cilindar