

Elementarna matematika 2

predavanja

Sveučilište u Zagrebu, PMF-MO

Klasična geometrija vektora

Duljina, smjer i orijentacija

Definicija

Duljina vektora $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ definira se kao $|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Propozicija 5

Duljina vektora je dobro definirana, tj. ne ovisi o izboru predstavnika.

Dokaz. (DZ) **Napomena.** $|\vec{0}| = 0$, $|\vec{a}| > 0$, za sve $\vec{a} \neq 0$.

Definicija

Za vektore $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ i $\vec{b} = [\overrightarrow{CD}]$ kažemo da su *istog smjera* ako je $AB \parallel CD$. Pišemo $\vec{a} = \vec{b}$. (Ovdje je $\vec{a}, \vec{b} \neq 0$.)

Propozicija 6

- (a) *Relacija biti istog smjera ne ovisi o izboru predstavnika.*
- (b) *Relacija biti istog smjera je relacija ekvivalencije na V^2 .*

Duljina, smjer i orijentacija

Definicija

Klase ekvivalencije relacije “biti istog smjera” nazivamo **smjerovima vektora**.

Definicija

Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ vektori istog smjera, te O, A, B kolinearne točke, takve da je

$$\vec{a} = [\overrightarrow{OA}] \quad i \quad \vec{b} = [\overrightarrow{OB}].$$

Kažemo da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **iste orijentacije** ako su A i B s iste strane točke O , a **suprotne orijentacije** ako je O između A i B .

Propozicija 7

Definicija pojma orijentacije je dobra, tj. ne ovisi o izboru točke O .

Napomena. Vektor je jedinstveno određen svojim duljinom, smjerom i orijentacijom.

Napomena. Suprotni vektori imaju istu duljinu i smjer, ali suprotnu orijentaciju.

Definicija

Za vektor $\vec{a}$ i skalar $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiramo vektor $\alpha\vec{a}$ na sljedeći način:

- (1) Duljina od $\alpha\vec{a}$ je $|\alpha| |\vec{a}|$.
- (2) Smjer od $\alpha\vec{a}$ je isti kao smjer od $\vec{a}$.
- (3) Ako je $\alpha > 0$, onda su $\alpha\vec{a}$ i $\vec{a}$ iste orijentacije. Ako je $\alpha < 0$, onda su $\alpha\vec{a}$ i $\vec{a}$ suprotne orijentacije.

Također, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Množenje vektora skalarom

Teorem 8

Množenje vektora skalarom ima ova svojstva:

1. Kvaziasocijativnost:

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall \vec{a} \in V^2) \quad \alpha(\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}.$$

2. Postojanje jedinice:

$$(\forall \vec{a} \in V^2) \quad 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.$$

3. Distributivnost prema zbrajanju vektora:

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2) \quad \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

4. Distributivnost prema zbrajanju skalara:

$$(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall \vec{a} \in V^2) \quad (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}.$$

Korolar 9

Skup svih vektora V^2 , s obzirom na operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom, čini jedan vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

Množenje vektora skalarom

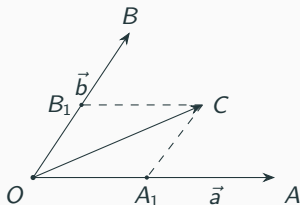
Napomena. Sada možemo uvesti standardne pojmove linearne algebre: nezavisan skup vektora, skup ravnina, bazu prostora, dimenziju...

Propozicija 10

Vekt. prostor $(V^2, +, \cdot)$ je dvodimenzionalan:

Skica dokaza. Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$ proizvoljni nekolinearni vektori, te $\vec{c} \in V^2$ proizv.

Neka $\vec{a} = [\vec{OA}]$, $\vec{b} = [\vec{OB}]$, $\vec{c} = [\vec{OC}]$.



Kroz C povučemo paralele s OA i OB, B_1, A_1 presjeci s OB i OA.

Sada je:

$$[\vec{OA_1}] = \alpha[\vec{OA}], \quad \text{za neki } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$[\vec{OB_1}] = \beta[\vec{OB}], \quad \text{za neki } \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \vec{c} = [\vec{OC}] &= [\vec{OA_1}] + [\vec{OB_1}] \\ &= \alpha[\vec{OA}] + \beta[\vec{OB}] = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \end{aligned}$$

Napomena. Kada fiksiramo bazu vektorskog prostora, možemo uvesti koordinatizaciju.

Svaki vektor $\vec{c}$ može se na jedinstven način prikazati u obliku

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

Stoga možemo poistovjetiti $\vec{c} = (\alpha, \beta)$.

Posebno su pogodne ortonormirane baze.

Da njih uvedemo, trebamo prvo pojam skalarnog produkta.

Skalarni produkt

Definicija

Neka $\vec{a}, \vec{b} \in V^2 \setminus \{\vec{0}\}$, te $\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$.

Kut između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) := \angle AOB \in [0, \pi]$$

(neorijentirani kut, $\angle(\vec{b}, \vec{a}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$).

Ako je

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2},$$

kažemo da su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ *okomiti* i pišemo

$$\vec{a} \perp \vec{b}.$$

Napomena. Kut ne ovisi o izboru reprezentanta (kutevi s paralelnim krakima su isti).

Definicija

Neka je

$$u : V^2 \times V^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

preslikavanje dano sa:

$$(1) \quad u(\vec{a}, \vec{b}) = 0, \text{ ako je } \vec{a} = \vec{0} \text{ ili } \vec{b} = \vec{0},$$

$$(2) \quad u(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}), \text{ ako } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}.$$

Broj $u(\vec{a}, \vec{b})$ zovemo **skalarni produkt** vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ i označavamo sa

$$u(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Propozicija 11

(a) Neka $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$. Tada

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

(b)

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Dokaz.

Tvrđnja slijedi iz definicije skalarnog produkta.



Lema 12

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b},$$

$$(\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Skalarni produkt

Teorem 13

Skalarni produkt ima sljedeća svojstva:

(1) *komutativnost:*

$$(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

(2) *kvaziasocijativnost:*

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})(\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2) \quad (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$

(3) *distributivnost prema zbrajanju:*

$$(\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^2) \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c},$$

(4) *pozitivna definitnost:*

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0,$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $\vec{a} = \vec{0}$.

Dokaz.

- (1) Direktno iz definicije skalarnog produkta i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{b}, \vec{a})$.
- (2) Ako je $\lambda = 0$ ili $\vec{a} = \vec{0}$ ili $\vec{b} = \vec{0}$, onda su obje strane jednake 0.
Neka je dalje $\lambda \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$.

Slučaj 1: $\lambda > 0$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = |\lambda \vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Slučaj 2: $\lambda < 0$

$$\angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \pi - \angle(\vec{a}, \vec{b}), \quad |\lambda \vec{a}| = -\lambda |\vec{a}|.$$

Zato

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\lambda \vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\lambda \vec{a}, \vec{b}) \\ &= (-\lambda) |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})) \\ &= \lambda |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}). \end{aligned}$$

(3)

$$2 \cdot 2\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (2\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})) \cdot (2\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})) - 2\vec{a} \cdot 2\vec{a} - (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} + \vec{c}).$$

Primjenom leme dobije se

$$4 \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 4 \vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \vec{a} \cdot \vec{c},$$

pa dijeljenjem s 4 slijedi

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

(4) Slijedi iz svojstva

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0,$$

a jednakost vrijedi ako i samo ako je $|\vec{a}| = 0$, tj. $\vec{a} = \vec{0}$.



Skalarni produkt

Definicija

Neka su $\vec{i}, \vec{j}$ vektori za koje vrijedi

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1 \quad i \quad \vec{i} \perp \vec{j}.$$

Tada je

$$B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$$

ortonormirana baza za V^2 .

Ako je

$$\vec{c} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j},$$

kažemo da su α i β *koordinate vektora $\vec{c}$ u bazi B* i pišemo

$$\vec{c} = (\alpha, \beta).$$

Napomena. Lako vidimo da je ortonormirana baza doista baza za V^2 .

Propozicija 14

Neka su

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \vec{b} = (\beta_1, \beta_2)$$

proizvoljni vektori u V^2 .

Tada:

(1)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2.$$

(2)

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

(3) Za $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ je

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}.$$

Dokaz.

(1)

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j}) \cdot (\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j}) \stackrel{[\text{TM13}]}{=} \alpha_1 \beta_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + \alpha_1 \beta_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + \alpha_2 \beta_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + \alpha_2 \beta_2 \vec{j} \cdot \vec{j} \\ &= \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2.\end{aligned}$$

(2) Direktno iz (1) i *Prop.11(b)*.

(3) Direktno iz

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

te (1) i (2).



Napomena.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 = 0.$$

Vektori u trodimenzionalnom prostoru

Kao što smo razvili aksiomatiku ravninske geometrije, moguće je razviti aksiomatiku prostorne geometrije.

Uz točke i pravce, novi objekti su ravnine te dodajemo još četiri aksioma incidencije:

- (I4) Za svake 3 točke koje ne leže na istom pravcu, postoji jedinstvena ravnina koja ih sadrži.
- (I5) Ako točke A, B leže u ravnini, onda svaka točka pravca AB leži u istoj toj ravnini.
- (I6) Ako točka A leži u ravninama π_1 i π_2 , onda postoji još barem jedna točka $B \in \pi_1 \cap \pi_2$.
- (I7) Postoje barem 4 točke koje ne leže u istoj ravnini.

Vektori u trodimenzionalnom prostoru

Važna razlika u odnosu na $2D$ je u definiciji paralelnosti pravaca.

Definicija

Pravci su *paralelni* ako pripadaju istoj ravnini i ne sijeku se

.

Pravci koji ne pripadaju istoj ravnini su *mimoilazni*.

DZ. Dokaz da je relacija “biti paralelan” relacija ekvivalencije.

Sada možemo proširiti svu razvijenu teoriju na $3D$, uvesti tetraedre, kocke, sfere itd.

Zasad nas zanimaju samo vektori.

Možemo posve analogno definirati smjer, duljine i vektore te zbrajanje vektora, množenje vektora skalarom i skalarni produkt.

Jedina razlika u odnosu na $2D$ nastupa kad uvedemo koordinatizaciju jer je $(V^3, +, \cdot)$ 3D-vekt. prostor.

Vektori u trodimenzionalnom prostoru

Definicija

Neka su $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ vektori u V^3 takvi da je

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1 \quad i \quad \vec{i} \perp \vec{j}, \vec{i} \perp \vec{k}, \vec{j} \perp \vec{k}.$$

Tada je

$$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

ortonormirana baza za V^3 .

Ako je

$$\vec{c} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k},$$

pišemo

$$\vec{c} = (\alpha, \beta, \gamma).$$

Propozicija 15

Neka su

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad i \quad \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

proizvoljni vektori u V^3 .

Tada:

(1)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

(2)

$$|\vec{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2},$$

(3) za $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ je

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}}.$$

Definicija

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su *kolinearni* ako imaju isti smjer.

(Uočimo: paralelnost iz definicije smjera je sada u 3D.)

Napomena.

$\vec{a} = [\overrightarrow{OA}]$, $\vec{b} = [\overrightarrow{OB}]$ su kolinearni $\iff \vec{a}, \vec{b}$ su lin. zavisni

$$\iff \exists \alpha, \beta \neq 0 \text{ t.d. } \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = \vec{0}$$

$$\iff O, A, B \text{ leže na istom pravcu.}$$

Definicija

Vektor $\vec{a} = [\overrightarrow{AB}]$ je **paralelan** s ravninom π ako je pravac AB paralelan s π (a to znači da u π postoji pravac p takav da je $p \parallel AB$).

Definicija

Skup vektora $S \subseteq V^3$ je **komplanaran** ako postoji ravnina π s kojom su paralelni svi vektori iz S .

Napomena. Za proizvoljne $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ je $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ komplanaran.

Ako je

$$\vec{a} = [\overrightarrow{OA}], \quad \vec{b} = [\overrightarrow{OB}],$$

onda je π ravnina kroz O, A, B .

Teorem 16

- (a) *Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ nekolinearni vektori.
Vektor $\vec{c} \in V^3$ je komplanaran s $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako i samo ako postoje
jedinствени $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da*

$$\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

- (b) *Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$ nekomplanarni vektori.
Za proizvoljni vektor $\vec{d} \in V^3$ postoje jedinствени $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da*

$$\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}.$$

Vektorski produkt

Definicija

Preslikavanje

$$v : V^3 \times V^3 \rightarrow V^3$$

definiramo na sljedeći način. Za $\vec{c} = v(\vec{a}, \vec{b})$ vrijedi

(1) ako su $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni, onda je $\vec{c} = \vec{0}$,

(2) ako $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni, onda:

(a) duljina:

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

(b) smjer od $\vec{c}$ je određen zahtjevima

$$\vec{c} \perp \vec{a} \quad i \quad \vec{c} \perp \vec{b},$$

(c) orijentacija od $\vec{c}$ je tako uređena da trojka $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ predstavlja desnu bazu u V^3 .

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ desna baza = palac u smjeru $\vec{a}$, kažiprst u smjeru $\vec{b}$, srednji prst u smjeru $\vec{c}$.

Pišemo $v(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b}$.

Napomena. Ne postoji analogon vektorskog produkta u V^2 niti u bilo kojoj višoj dimenziji.

Definicija

Neka su dani različiti pravci p i q u ravnini. Iz svake točke pravca p možemo spustiti jedinstvenu okomicu na pravac q .

Ortogonalna projekcija je funkcija $f : p \rightarrow q$ takva da za svaku točku $P \in p$ vrijedi

$$f(P) = Q,$$

gdje je Q nožište okomice iz P na q .

Teorem 17

Vektorski produkt ima sljedeća svojstva:

(1) *antikomutativnost:*

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}), \quad \vec{a}, \vec{b} \in V^3$$

(2) *kvaziasocijativnost:*

$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b}), \quad \vec{a}, \vec{b} \in V^3, \lambda \in \mathbb{R}$$

(3) *distributivnost:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}), \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3$$

(4)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a},$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{c} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c},$$

pa vektorski produkt nije asocijativan.

(5) *vrijedi Jacobijev identitet:*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Dokaz.

- (1) Očito $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{a}$ imaju istu duljinu i smjer, a suprotnu orijentaciju.
- (2) Ako je $\lambda = 0$, trivijalno.

Ako je $\lambda > 0$, tada je $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \angle(\vec{a}, \vec{b})$, pa je

$$\begin{aligned} |(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| &= |\lambda\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= \lambda |\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})|. \end{aligned}$$

Smjer od $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$: okomit na $\lambda\vec{a}$ i na $\vec{b}$, dakle isti kao smjer od $\vec{a} \times \vec{b}$, pa i kao smjer od $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Orijentacija od $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$: ista kao orijent. $\vec{a} \times \vec{b}$, tj. kao $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Ako je $\lambda < 0$, tada je $\angle(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})$, pa je

$$\begin{aligned} |(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| &= |\lambda\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\pi - \angle(\vec{a}, \vec{b})) = (-\lambda) |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \angle(\vec{a}, \vec{b}) \\ &= |\lambda| |\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})|. \end{aligned}$$

Smjer je kao gore, a orijentacija od $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$ je suprotna od orijentacije $\vec{a} \times \vec{b}$, što je isto kao orijentacija od $\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$.

Vektorski produkt

(3) Ako je bilo koji od $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nul-vektor, tvrdnja je trivijalna.

Pretpostavimo dakle $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \neq \vec{0}$.

Neka je $\vec{a} = [\vec{OA}]$, $\vec{b} = [\vec{OB}]$, $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Neka je π ravnina kroz O , okomita na $\vec{a}$, te Q ortogonalna projekcija od B na π .

Iz $\triangle OBQ$ imamo

$$|OQ| = |\vec{b}| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = |\vec{b}| \sin \varphi.$$

Neka je $X \in \pi$ točka za koju vrijedi:

(1) $|OX| = |OQ|$,

(2) $\vec{OX} \perp \vec{OQ}$,

(3) $(\vec{OA}, \vec{OQ}, \vec{OX})$ je desna baza.

Uočimo, $\vec{OX}$ dobivamo rotacijom OB za $\frac{\pi}{2}$.

Neka je $Y \in \pi$ točka sa svojstvom

$$\vec{OY} = |\vec{a}| \cdot \vec{OX}.$$

Vektorski produkt

Tada je:

(1)

$$|\overrightarrow{OY}| = |\vec{a}| |\overrightarrow{OX}| = |\vec{a}| |OQ| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|,$$

(2) $\overrightarrow{OY} \perp \vec{a}, \quad \overrightarrow{OY} \perp \vec{b},$

jer $\overrightarrow{OQ} \parallel \vec{b},$

(3) $(\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{OY})$ je desna baza.

Dakle,

$$\overrightarrow{OY} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Stavimo $\vec{s} = \vec{b} + \vec{c} = [\overrightarrow{OS}]$.

Analogno provedemo konstrukciju za $\overrightarrow{OZ} = \vec{a} \times \vec{c}$ te $\overrightarrow{OR} = \vec{a} \times \vec{s}$.

Uočimo: reprezentanti vektora $\vec{b}, \vec{c}, \vec{s}$ čine trokut radi definicije vektorskog zbrajanja.

Nadalje, ortogonalna projekcija tog trokuta na ravninu je opet trokut.

Konačno, imamo množenje svih stranica trokuta s $|\vec{a}|$, što preslikava trokut u sličan trokut. Reprezentanti $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a} \times \vec{c}$ i $\vec{a} \times \vec{s}$ čine trokut, pa je

$$\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{s} = \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$$

(4) Preskačemo.

(5)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{a}\vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{b}\vec{c}) \cdot \vec{a},$$

$$(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{b}\vec{a}) \cdot \vec{c} - (\vec{c}\vec{a}) \cdot \vec{b},$$

$$(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{c}\vec{b}) \cdot \vec{a} - (\vec{a}\vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

$$\implies (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = 0.$$

Korolar 18

1. $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a}, \vec{b}$ kolinearni,
2. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$,
3. Ako $\vec{a}, \vec{b}$ nisu kolinearni, $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je površina paralelograma na stranicama $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$,
4. $\vec{a} \times (\lambda \vec{c}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{c})$, $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$.

Napomena. Vektorski prostor zajedno s operacijom $\times$ za koju vrijede svojstva *Teorem17.(2)(3)*, *Korolar18.(4)* zove se **algebra**.

Dodatno, algebra za koju vrijedi *Teorem17.(5)*, *Korolar18.(2)* zove se **Liejeva algebra**.

Teorem 19

V sa vektorskim množenjem čini Lijevu algebru nad $\mathbb{R}$.

Napomena. Želimo izvesti formulu za koordinatni prikaz od $\vec{a} \times \vec{b}$.

Propozicija 20

Neka je

$$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Tada:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1).$$

Dokaz. Koristimo distributivnost, kvaziasocijativnost i antikomutativnost, te

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

pa je

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (\alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j} + \alpha_3 \vec{k}) \times (\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}) \\ &= \alpha_1 \beta_2 \vec{k} - \alpha_1 \beta_3 \vec{j} - \alpha_2 \beta_1 \vec{k} + \alpha_2 \beta_3 \vec{i} + \alpha_3 \beta_1 \vec{j} - \alpha_3 \beta_2 \vec{i} \\ &= (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \vec{i} + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \vec{j} + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \vec{k}.\end{aligned}$$

Napomena. Formulu je puno lakše pamtiti kao determinantu

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$