

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 22. studenog 2024.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Trajanje: 2 sata.

Zadatak 1. (13 bodova)

- (a) (5 bodova) Ako je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ proizvoljan vjerojatnosni prostor, iskažite i dokažite svojstvo *konačne subaditivnosti* vjerojatnosti $\mathbb{P}$ za događaje $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. *Napomena:* Ne možete se jednostavno pozvati na svojstvo σ -subaditivnosti od $\mathbb{P}$.
- (b) (5 bodova) Promatramo $n \geq 2$ osoba i okrugli stol oko kojeg se nalazi n stolica, pri čemu su stolice redom označene brojevima $1, 2, \dots, n$. Osobe jedna za drugom sjedaju za stol pri čemu svaka osoba slučajno bira s jednakom vjerojatnosti bilo koju od preostalih slobodnih stolica. Ako je

$$A_i := \{i\text{-ta osoba je sjela na } i\text{-tu ili neku od dvije susjedne stolice}\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

Odredite $\mathbb{P}(A_1)$, $\mathbb{P}(A_n)$ i $\mathbb{P}(A_n \cap A_1)$.

- (d) (3 boda) Neka je (V, E) potpun neusmjeren graf s $n \geq 2$ vrhova; to znači da su svaka dva vrha spojena bridom, tj. za sve $i, j \in V$, $i \neq j$, imamo $\{i, j\} \in E$. Svaki vrh, nezavisno od ostalih, obojamo u plavo s vjerojatnošću p , odnosno crveno s vjerojatnošću $q := 1 - p$, pri čemu je $p \in (0, 1)$. Odredite očekivani broj bridova koji spajaju vrhove različitih boja. *Napomena:* Ukupan broj bridova je $|E| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 22. studenog 2024.

Zadatak 2. (12 bodova)

- (a) (2 boda) Precizno definirajte pojam nezavisnosti familije događaja na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- (b) (b1) (4 boda) Iskažite Borel-Cantellijeve leme te dokažite jednu od njih.
- (b2) (3 boda) Za niz događaja $(A_n)_n$ definiramo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{i} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Navedite primjer niza događaja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ za koji vrijedi $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ te primjer niza događaja $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ za koji vrijedi $\liminf_{n \rightarrow \infty} B_n \subsetneq \limsup_{n \rightarrow \infty} B_n$.

- (c) (3 boda) Student putuje iz studentskog doma na kolokvij iz Vjerojatnosti. S vjerojatnošću 25% je zaboravio noć prije staviti mobitel na punjenje te mu se ne oglašava alarm i probudi se prekasno. U tom slučaju zove taksi koji zbog jutarnje gužve kasni s vjerojatnošću 20%. S druge strane, ako se student probudi na vrijeme, ide na tramvaj, no i u tom slučaju zbog jutarnje gužve kasni s vjerojatnošću 60%. Ako je student stigao na kolokvij na vrijeme, odredite vjerojatnost da se i probudio na vrijeme.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 22. studenog 2024.

Zadatak 3. (13 bodova)

- (a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s tablicom razdiobe

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$$

Precizno definirajte pojam *matematičkog očekivanja* slučajne varijable X .

- (b) (2 boda) Tablica razdiobe slučajne varijable X dana je s

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & \pi/2 & \pi & 3\pi/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Izračunajte $\mathbb{E}[\cos(X)]$ i $\text{Var}[\cos(X)]$.

- (c) Bacamo simetričnu igraću kocku.

(c1) (3 boda) Neka je X slučajni broj šestica u 30 bacanja. Izračunajte $\mathbb{E}[X]$.

(c2) (3 boda) Neka je Y slučajni broj bacanja potrebnih da bi se dobilo 5 šestica. Izračunajte $\mathbb{E}[Y]$.

- (d) (3 boda) Prva kutija sadrži 35 kuglica, druga kutija 40 kuglica, a treća kutija 45 kuglica. Na slučajan način izabrana je jedna od 120 kuglica (sve kuglice su jednako vjerojatne). Neka X označava broj kuglica u kutiji (prije izvlačenja) u kojoj se nalazila ta slučajno odabrana kuglica. Nađite $\mathbb{E}[X]$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 22. studenog 2024.

Zadatak 4. (12 bodova)

- (a) (3 boda) Ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u skupu $\mathbb{N}$, dokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 \cdots X_n] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i].$$

- (b) (2 boda) Ako su X i Y nezavisne diskretne slučajne varijable takve da je $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \mu \in \mathbb{R}$ te $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = \sigma^2 \in (0, \infty)$, pokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] = 2\sigma^2.$$

- (c) (4 boda) Definirajte kada kažemo da slučajna varijabla X ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$, te izvedite $\mathbb{E}[X \mid X \geq 1]$ u tom slučaju.

- (d) (3 boda) Neka su X i Y nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima 10 i 20, redom. Za svaki $n \geq 1$, odredite distribuciju slučajne varijable X uvjetno na $X + Y = n$. *Napomena:* Možete se pozvati na rezultat o distribuciji slučajne varijable $X + Y$ pod ovim pretpostavkama.