

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 31. siječanj 2025.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Trajanje: 2 sata.

Zadatak 1. (12 bodova)

- (a) (2 boda) Definirajte pojam (apsolutno) neprekidnog slučajnog vektora (X, Y) .
- (b) Dva prijatelja su se dogovorili naći na Trgu bana Jelačića između 10 i 11 sati. Dolazak svakog od njih je slučajan i uniformno distribuiran u periodu od 10 do 11 sati, te su dolasci nezavisni.
- (b1) (3 boda) Nađite vjerojatnost da osoba koja dođe prva čeka više od 10 minuta do dolaska druge osobe.
- (b2) (3 boda) Nađite očekivano vrijeme čekanja osobe koja prva dođe na sastanak.
- (c) (4 boda) Neka je (X, Y) neprekidan slučajni vektor sa zajedničkom gustoćom

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y}, & 0 < x < \infty, \ 0 < y < \infty, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite uvjetnu gustoću slučajne varijable X uz dano $Y = y$, $y > 0$. Koliko je $\mathbb{E}[X | Y = y]$?

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 31. siječanj 2025.

Zadatak 2. (13 bodova)

- (a) (2 boda) Definirajte konvergenciju po distribuciji niza slučajnih varijabli.
- (b) (2 boda) Precizno iskažite centralni granični teorem.
- (c) (5 bodova) Dokažite centralni granični teorem uz dodatni uvjet da slučajne varijable imaju konačnu funkciju izvodnicu momenata.
- (c) (4 boda) Broj studenata koji upisuje kolegij *Vjerojatnost* je Poissonova slučajna varijabla s očekivanjem 100. Ukoliko je broj upisanih studenata veći ili jednak od 120, kolegij će se održavati u dvije sekcije. Ukoliko je taj broj manji od 120, kolegij će se održavati u jednoj sekciji. Koristeći centralni granični teorem aproksimirajte vjerojatnost da će se kolegij održavati u dvije sekcije. Možete koristiti sljedeće vrijednosti: $\Phi(1.0) = 0.841$, $\Phi(1.5) = 0.933$, $\Phi(2.0) = 0.977$, $\Phi(2.5) = 0.993$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 31. siječanj 2025.

Zadatak 3. (12 bodova)

- (a) (2 boda) Precizno definirajte funkciju izvodnicu momenata M_X proizvoljne slučajne varijable X .
- (b) (3 boda) Dokažite: ako su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne slučajne varijable s pripadnim funkcijama izvodnicama momenata $M_{X_1}, \dots, M_{X_n}$, tada postoji neki $t_0 > 0$ za koji vrijedi

$$M_{X_1+\dots+X_n}(t) = M_{X_1}(t) \cdots M_{X_n}(t)$$

za sve $t \in [-t_0, t_0]$.

- (c) (3 boda) Ako je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, odredite $\mathbb{E}[(X - \mu)^n]$ za sve $n \geq 1$.
- (d) (4 boda) Kažemo da slučajna varijabla X ima χ^2 -distribuciju s n stupnjeva slobode ($n \in \mathbb{N}$, oznaka $X \sim \chi^2(n)$) ako joj je funkcija izvodnica momenata jednaka

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-n/2}, \quad \text{za } t < 1/2.$$

Neka su $X_1, \dots, X_k$ njd slučajne varijable sa $N(0, 1)$ distribucijom. Pokažite da za neki $n \in \mathbb{N}$, $H := X_1^2 + \dots + X_k^2$ ima $\chi^2(n)$ razdiobu.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 31. siječanj 2025.

Zadatak 4. (13 bodova)

- (a) (3 boda) Kada kažemo da slučajna varijabla X ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ (oznaka $X \sim \text{Exp}(\lambda)$)? Izvedite $\mathbb{E}[X]$ u tom slučaju.
- (b) (3 boda) Neka je N slučajna varijabla u $\mathbb{N}_0$ takva da je $\mathbb{E}[N] < \infty$, te $X_1, X_2, \dots$ niz nenegativnih njd slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem $\mu := \mathbb{E}[X_1] < \infty$ te varijancom $\sigma^2 := \text{Var}(X_1)$ koje su nezavisne od N . Ako je $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 0$ (uz $S_0 := 0$), ukoliko postoji, odredite $\text{Var}(S_N)$ u terminima $\mu, \sigma^2, \mathbb{E}[N]$ i $\text{Var}(N)$. *Napomena:* Ne morate dokazivati formulu za $\mathbb{E}[S_N]$.
- (c) (3 boda) Mailovi stižu u vaš pretinac u slučajnim vremenima. Neka $T_n \in [0, \infty)$ označava vrijeme kada je stigao n -ti mail po redu (pri čemu vrijeme 0 predstavlja neki odabrani trenutak u vremenu), a prepostavka je da za vremena između mailova $E_1 := T_1, E_n := T_n - T_{n-1}$, $n \geq 2$, vrijedi da su njd sa $\text{Exp}(\lambda)$ razdiobom za $\lambda > 0$. Svaki mail nije spam s vjerojatnošću $p \in (0, 1)$ (nezavisno od ostalih mailova i nezavisno od vremena $(E_n)_n$). Ako je X trenutak kada je stigao prvi mail koji nije spam, odredite $\mathbb{E}[X]$.
- (d) (4 boda) Ako je $E \sim \text{Exp}(1)$, te $a, b > 0$ konstante, odredite funkciju distribucije te gustoću (neprekidne) slučajne varijable $X := \frac{E}{a} + b$. Nađite slučajnu varijablu Z takvu da X ima istu razdiobu kao i Z uvjetno na $Z > b$.