

VEKTORSKI PROSTORI

2. kolokvij - 3. veljače 2020.

1. (i) (**3 boda**) Neka je V konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor, te $A \in L(V)$ takav da je $A = \lambda I + N$, pri čemu je $\lambda \in \mathbb{C}$, a $N \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa p . Napišite definiciju od $f(A)$ i nužne uvjete na funkciju f uz koje je $f(A)$ definirano.
 - (ii) (**4 boda**) Precizno iskažite i dokažite teorem o dijagonalizaciji unitarnog operatora na konačnodimenzionalnom kompleksnom unitarnom prostoru.
 - (iii) (**3 boda**) Neka je V konačnodimenzionalan unitarni prostor, te $A \in L(V)$ regularan operator. Dokažite da je tada A^*A strogo pozitivan operator.
2. (**5 bodova**) Operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ zadan je u kanonskoj bazi matričnim prikazom u kanonskoj bazi

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 4 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odredite, $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $\{\sin \frac{\pi A}{4}, e^{\alpha(A^2 - I)}\}$ linearno zavisani skup. Bez računanja odgovorite postoji li $\beta \in \mathbb{C}$ takav da je $\{\sin \frac{\pi A}{4}, e^{\beta A^7 - I}, A\}$ linearno nezavisani skup.

3. (**5 bodova**) Neka su dane kanonska baza (e) i baza $(f_1, f_2, f_3) = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ unitarnog prostora $\mathbb{C}^3$ uz standardni skalarni produkt. Operator $A \in L(V)$ je zadan matričnim prikazom

$$A_{(f)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Je li baza (f) ortonormirana? Je li A normalan? Odredite neku ortonormiranu bazu u kojoj A ima dijagonalan prikaz, ako takva postoji.

4. (**5 bodova**) Zadana je matrica $B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Odredite najbolju aproksimaciju

matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ iz potprostora $W = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid XB = -X\}$.

5. (**5 bodova**) Neka je H hermitski operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru koji zadovoljava

$$H^9 + H^7 + H^5 + H^3 - 4I = 0.$$

Dokažite da je $H = I$.

6. (**5 bodova**) Pokažite da je operator $A \in L(\mathbb{C}^2)$ zadan matricom

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}.$$

pozitivan. Odredite $\sqrt{A}$.

VEKTORSKI PROSTORI

2. kolokvij - 3. veljače 2020.

1. (i) (**3 boda**) Neka je V konačnodimenzionalan kompleksan vektorski prostor, te $A \in L(V)$ takav da je $A = \lambda I + N$, pri čemu je $\lambda \in \mathbb{C}$, a $N \in L(V)$ nilpotentan operator indeksa p . Napišite definiciju od $f(A)$ i nužne uvjete na funkciju f uz koje je $f(A)$ definirano.
 - (ii) (**4 boda**) Precizno iskažite i dokažite teorem o dijagonalizaciji unitarnog operatora na konačnodimenzionalnom kompleksnom unitarnom prostoru.
 - (iii) (**3 boda**) Neka je V konačnodimenzionalan unitarni prostor, te $A \in L(V)$ regularan operator. Dokažite da je tada A^*A strogo pozitivan operator.
2. (**5 bodova**) Operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ zadan je u kanonskoj bazi matričnim prikazom u kanonskoj bazi

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Odredite, $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $\{\sin \frac{\pi A}{4}, e^{\alpha(A^3-I)}\}$ linearno zavisn skup. Bez računanja odgovorite postoji li $\beta \in \mathbb{C}$ takav da je $\{\sin \frac{\pi A}{4}, e^{\beta A^7-I}, A\}$ linearno nezavisn skup.

3. (**5 bodova**) Neka su dane kanonska baza (e) i baza $(f_1, f_2, f_3) = (e_1, -e_1+e_2, e_1-e_2+e_3)$ unitarnog prostora $\mathbb{C}^3$ uz standardni skalarni produkt. Operator $A \in L(V)$ je zadan matričnim prikazom

$$A_{(f)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Je li baza (f) ortonormirana? Je li A normalan? Odredite neku ortonormiranu bazu u kojoj A ima dijagonalan prikaz, ako takva postoji.

4. (**5 bodova**) Zadana je matrica $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Odredite najbolju aproksimaciju

matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ iz potprostora $W = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid XB^T = X\}$.

5. (**5 bodova**) Neka je H hermitski operator na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru koji zadovoljava

$$H^7 + H^5 + H^3 + 3I = 0.$$

Dokažite da je $H = -I$.

6. (**5 bodova**) Pokažite da je operator $A \in L(\mathbb{C}^2)$ zadan matricom

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

pozitivan. Odredite $\sqrt{A}$.