VEKTORSKI PROSTORI

1. kolokvij - 25. studenog 2019.

1. (i) (2 boda) Definirajte pojam regularnog operatora $A \in L(V)$ i dokažite da je A regularan ako i samo ako je surjektivan.

(ii) (4 boda) Definirajte pojam minimalnog polinoma μ_A linearnog operatora A i pokažite da je jedinstveno određen s time da je normiran i najmanjeg pozitivnog stupnja između polinoma koji se poništavaju na A. Dokažite da je stupnja manjeg ili jednakog dimenziji prostora.

(iii) (4 boda) Iskažite teorem o nilpotentnim operatorima u općem slucaju. Navedite formulu za broj k–dimenzionalnih invarijantnih potprostora koji se javljaju u tom teoremu. Napišite matrični zapis nilpotentnog operatora. Tvrdnje nije potrebno dokazivati.

2. (5 bodova) Operator $B \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je u kanonskoj bazi matričnim zapisom

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite $\mu_B(\lambda)$. Ako ne koristite algoritam sa vježbi, obrazložite kako ste došli do zaključka.

3. (5 bodova) Zadani su vektori $a = (1, 1, -1, 1)$, $b = (0, 1, 2, 2)$, $c = (0, 2, 1, 3)$ u $\mathbb{R}^4$, te njihova linearna ljuska $W = [\{a, b, c\}] \leq \mathbb{R}^4$. Zapišite W kao skup rješenja sustava linearnih homogenih jednadžbi.

4. (5 bodova) Neka je operator $A \in L(\mathbb{C}^8)$ takav da mu se Jordanova forma sastoji od jednog elementarnog $3-$bloka za svojstvenu vrijednost -7, dva elementarna $2-$bloka za svojstvenu vrijednost 3 te jednog $1-$bloka za svojstvenu vrijednost 3. Odredite $\mu_A(\lambda)$, $\mathrm{tr}(A + 7I)$, $\det(A^2 - 4I)$, te $\mu_{(A-3I)^2}(\lambda)$.

5. (5 bodova) Operator $A \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je u kanonskoj bazi matričnim zapisom

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokažite da je A nilpotentan operator, odredite Jordanovu formu od A i neku Jordanovu bazu za A.

6. (5 bodova) Neka je $N \in L(\mathbb{C}^{18})$ nilpotentan operator indeksa 12 i ranga 16. Odredite Jordanovu formu od N^3(nije potrebno crtati matricu). Nadalje, ako je $(e) = (e_1, ..., e_{18})$ Jordanova baza za N, odredite i neku Jordanovu bazu za N^3. (Pomoć: Tražena je baza odgovarajuća permutacija baze (e).)

Rezultati i termini uvida će biti oglašeni na web stranici kolegija.

VEKTORSKI PROSTORI

1. kolokvij - 25. studenog 2019.

1. (i) (2 boda) Definirajte pojam regularnog operatora $A \in L(V)$ i dokažite da je A regularan ako i samo ako je surjektivan.

(ii) (4 boda) Definirajte pojam minimalnog polinoma μ_A linearnog operatora A i pokažite da je jedinstveno određen s time da je normiran i najmanjeg pozitivnog stupnja između polinoma koji se poništavaju na A. Dokažite da je stupnja manjeg ili jednakog dimenziji prostora.

(iii) (4 boda) Iskažite teorem o nilpotentnim operatorima u općem slucaju. Navedite formulu za broj k–dimenzionalnih invarijantnih potprostora koji se javljaju u tom teoremu. Napišite matrični zapis nilpotentnog operatora. Tvrdnje nije potrebno dokazivati.

2. (5 bodova) Operator $B \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je u kanonskoj bazi matričnim zapisom

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite $\mu_B(\lambda)$. Ako ne koristite algoritam sa vježbi, obrazložite kako ste došli do zaključka.

3. (5 bodova) Zadani su vektori $a = (1, 2, 1, 0)$, $b = (0, 3, 2, -1)$, $c = (1, -1, -1, 1)$ u $\mathbb{R}^4$, te njihova linearna ljuska $W = [\{a, b, c\}] \leq \mathbb{R}^4$. Zapišite W kao skup rješenja sustava linearnih homogenih jednadžbi.

4. (5 bodova) Neka je operator $A \in L(\mathbb{C}^9)$ takav da mu se Jordanova forma sastoji od dva elementarna $2-$bloka za svojstvenu vrijednost 5, jednog elementarnog $4-$bloka za svojstvenu vrijednost -4 te jednog $1-$bloka za svojstvenu vrijednost -4. Odredite $k_A(\lambda)$, $\mathrm{tr}(A + 7I)$, $\det(A^2 + I)$, te $\mu_{(A-5I)^2}(\lambda)$.

5. (5 bodova) Operator $A \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je u kanonskoj bazi matričnim zapisom

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokažite da je A nilpotentan operator, odredite Jordanovu formu od A i neku Jordanovu bazu za A.

6. (5 bodova) Neka je $N \in L(\mathbb{C}^{15})$ nilpotentan operator indeksa 9 i ranga 13. Odredite Jordanovu formu od N^3(nije potrebno crtati matricu). Nadalje, ako je $(e) = (e_1, ..., e_{15})$ Jordanova baza za N, odredite i neku Jordanovu bazu za N^3. (Pomoć: Tražena je baza odgovarajuća permutacija baze (e).)

Rezultati i termini uvida će biti oglašeni na web stranici kolegija.