VEKTORSKI PROSTORI

2. kolokvij - 8. veljače 2023.

1. (a) (**4 boda**) Iskažite i dokažite teorem o dijagonalizaciji unitarnih operatora na konačno-dimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru. Pokažite kontraprimjerom da teorem ne vrijedi na realnim prostorima.

(b) (**4 boda**) Definirajte normalne operatore na unitarnom prostoru. Dokažite da za normalni operator A vrijedi $Ker(A) = Ker(A^*)$ i $Im(A) = Im(A^*)$.

(c) (**2 boda**) Dokažite da hermitski operator H na realnom ili kompleksnom unitarnom vektorskom prostoru V ima neprazan spektar.

2. (**5 bodova**) Operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ zadan je u kanonskoj bazi matričnim prikazom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu operatora $\sqrt{3} \sin \frac{\pi A}{3}$ u kanonskoj bazi. Postoji li $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $\{\sqrt{3} \sin \frac{\pi A}{3}, e^{\alpha(A-I)}\}$ linearno zavisan skup?

3. (**5 bodova**) Odredite najbolju aproksimaciju vektora $(1, 2, 3)$ iz potprostora razapetog vektorima $(0, 1, 0)$ i $(1, 1, 1)$.

4. (**5 bodova**) Linearni operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ zadan je u kanonskoj bazi svojim matričnim zapisom

$$A(e) = \begin{bmatrix} 14 & 0 & 3 \\ 0 & 10i & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Dokažite da je operator A normalan. Odredite mu dijagonalni prikaz u nekoj ortonormiranoj bazi. Ortonormiranu bazu ne morate odrediti.

5. (**5 bodova**) Promatramo unitarni prostor $\mathbb{R}^3$ uz uobičajeni skalarni produkt. Dokažite da postoji operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ koji nije hermitski operator, a takav je da postoji baza od $\mathbb{R}^3$ sastavljena od njegovih svojstvenih vektora.

6. (**5 bodova**) Neka je V unitaran prostor i neka su W_1, W_2 njegovi vektorski potprostori. Označimo s P_1, P_2 redom ortogonalne projektore na W_1, W_2. Dokažite da je $P_1 P_2 = 0$ ako i samo ako vrijedi $(w_1 \mid w_2) = 0$ za sve $w_1 \in W_1$ i $w_2 \in W_2$. (Uputa: koristite činjenicu da je ortogonalan projektor hermitski.)

Rezultati i termini uvida će biti oglašeni na web stranici kolegija.