

VEKTORSKI PROSTORI

1. kolokvij - 29. studenog 2023.

NAPOMENA: kolokvij ima 2 stranice teksta

1. (a) (4 boda) Neka je V vektorski prostor, te $A \in L(V)$. Definirajte adjungirani (dualni) operator A' operatoru A . Dokažite da je $(A')^k = (A^k)'$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.
(b) (3 boda) Definirajte nilpotentan operator i indeks nilpotentnosti.
2. (a) (5 bodova) Odredite minimalni polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako ne koristite algoritam s vježbi, obrazložite rješenje. Odredite $\det A$, $\det (A+I)$, $\det (A-2I)$. Odredite A^{-1} , ako postoji.

- (b) (2 boda) Pronađite bilo koju matricu $B \in L(\mathbb{C}^3)$ takvu da je $\mu_B(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$.
3. Operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ u kanonskoj bazi $(e) = (e_1, e_2, e_3)$ za $\mathbb{C}^3$ ima matični zapis

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neka su $(f) = (f_1, f_2, f_3)$ i $(g) = (g_1, g_2, g_3)$ uređene trojke vektora iz $\mathbb{C}^3$ dane na sljedeći način:

$$(f) = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3),$$

$$(g) = (f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3).$$

- (a) (3 boda) Dokažite da su (f) i (g) baze za $\mathbb{C}^3$ i odredite zapis od $A(f, g)$, tj. $[A]_g^f$.
 - (b) (2 boda) Za vektor $x(f) = (2, 0, 1)$ odredite Ax u kanonskoj bazi.
 - (c) (2 boda) Odredite dualnu bazu baze (f) .
4. (a) (5 bodova) Operator $N \in L(\mathbb{C}^4)$ zadan je u kanonskoj bazi matičnim zapisom

$$N = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odredite Jordanovu formu od N i neku Jordanovu bazu za N . Zatim odredite minimalni polinom od N .

- (b) (2 boda) Neka je A nilpotentni operator indeksa nilpotentnosti 2023. Dokažite da je A^{10} nilpotentan i odredite mu indeks.
5. (a) (3 boda) Operator $A \in L(\mathbb{C}^8)$ u nekoj bazi (f) ima matični zapis

$$A(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & \\ & & & & & 2 & 1 & \\ & & & & & & 2 & \\ & & & & & & & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite geometrijske kratnosti svih svojstvenih vrijednosti od A . Zatim odredite $d((A-I)^2)$ i $d((A-2I)^3)$.

- (b) (2 boda) Napišite Jordanovu formu operatora $B \in L(\mathbb{C}^8)$ ako je poznato $\sigma(B) = \{-3, 1\}$, $\det B = -27$, $\dim(B + 3I) = 2$, $\dim(B - I) = 4$.
- (c) (2 boda) Neka za operator $C \in L(\mathbb{C}^5)$ vrijedi $C^2 - 4C + 3I = 0$ i $\text{card}(\sigma(C)) = 2$. Napišite sve mogućnosti za Jordanovu formu operatora C^{10} .