VEKTORSKI PROSTORI

2. kolokvij - 6. veljače 2024.

1. (a) (4 boda) Iskažite i dokažite teorem o dijagonalizaciji hermitskih operatora na realnom ili kompleksnom unitarnom prostoru.

(b) (3 boda) Neka je A linearni operator na unitarnom prostoru, U unitaran, H pozitivni hermitski operator, takvi da je $A = UH$. Dokažite da je operator H jedinstven. Diskutirajte jedinstvenost operatora U.

2. Operator $A \in L(\mathbb{C}^3)$ zadan je u kanonskoj bazi matričnim prikazom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) (5 bodova) Odredite matricu operatora $(A - 2I)\sin(\frac{\pi}{3}A)$ u kanonskoj bazi.

(b) (2 boda) Postoji li $\alpha \in \mathbb{C}$ takav da je $\{(A-2I)\sin(\frac{\pi}{3}A), \cos(\alpha\pi A)\}$ linearno zavisan skup?

3. (a) (5 bodova) Neka je H potprostor od $\mathbb{C}^4$ razapet vektorima $(1,0,1,0), (0,2,0,0)$ i $(0,0,2,-1)$. Odredite najbolju aproksimaciju vektora $(1,0,0,1)$ u H.

(b) (2 boda) Za svaki od vektora $(1,0,1,0), (0,2,0,0)$ i $(0,0,2,-1)$ odredite njegovu najbolju aproksimaciju u H.

4. Operator $A \in Ł(\mathbb{R}^2)$ zadan je formulom $A(x,y) = (x - 2y, -2x + 5y)$.

(a) (4 boda) Dokažite da je A pozitivan operator.

(b) (3 boda) Je li operator A unitaran? Dokažite svoju tvrdnju.

5. Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor.

(a) (3 boda) Ako je $A \in Ł(V)$ hermitski operator za kojeg vrijedi $(A^{24}+I)(A^3+I) = 0$, dokažite da je $A = -I$.

(b) (4 boda) Ako je $P \in L(V)$ ortogonalni projektor, odredite sve $a, b \in \mathbb{C}$ takve da je $aP + b(P - I)$ također ortogonalni projektor.

Rezultati i termini uvida će biti oglašeni na web stranici kolegija.