

# VEKTORSKI PROSTORI

Prvi rok - 6. veljače 2024.

1. (14 bodova) Definirajte nilpotentne operatore. Iskažite i dokažite osnovni teorem o nilpotentnim operatorima.
2. (14 bodova) Operator  $A \in L(\mathbb{C}^4)$  ima u nekoj bazi od  $\mathbb{C}^4$  matricu

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Koristeći algoritam za traženje minimalnog polinoma odredite minimalni polinom operatora  $A$ .

3. (14 bodova) Linearni operator  $A \in L(\mathbb{C}^4)$  ima u kanonskoj bazi od  $\mathbb{C}^4$  matricu

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odredite Jordanovu formu od  $A$  i neku Jordanovu bazu od  $A$ .

4. Operator  $A \in L(\mathbb{C}^3)$  zadan je u kanonskoj bazi matričnim prikazom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) (10 bodova) Odredite matricu operatora  $(A - 2I) \sin(\frac{\pi}{3}A)$  u kanonskoj bazi.
  - (b) (4 boda) Postoji li  $\alpha \in \mathbb{C}$  takav da je  $\{(A - 2I) \sin(\frac{\pi}{3}A), \cos(\alpha\pi A)\}$  linearno zavisan skup?
5. Neka je  $V$  kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor.
    - (a) (6 boda) Ako je  $A \in L(V)$  hermitski operator za kojeg vrijedi  $(A^{24} + I)(A^3 + I) = 0$ , dokažite da je  $A = -I$ .
    - (b) (8 boda) Ako je  $P \in L(V)$  ortogonalni projektor, odredite sve  $a, b \in \mathbb{C}$  takve da je  $aP + b(P - I)$  također ortogonalni projektor.