VEKTORSKI PROSTORI

Drugi rok - 20. veljače 2024.

1. (14 bodova) Definirajte normalne operatore. Iskazite i dokazite osnovni teorem o dijagonalizaciji normalnih operatora (14 bodova).

2. (14 bodova) Odredite Jordanovu formu operatora $A \in L(\mathbb{C}^6)$ ako je poznato da je $d((A+2I)^5) = 6$, stupanj minimalnog polinoma od A je 3, i vrijedi:

$$4r(A+2I) + tr(A) = 0.$$

3. (14 bodova) Linearni operator $A \in L(\mathbb{C}^4)$ ima u kanonskoj bazi od $\mathbb{C}^4$ matricu

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Odredite Jordanovu formu od A i neku Jordanovu bazu od A.

(b) Je li operator A nilpotentan? Odredite mu indeks nilpotentnosti.

4. (14 bodova) Operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadan je u kanonskoj bazi matričnim prikazom

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu operatora $e^{\sin(A)+\cos(A)}$ u kanonskoj bazi.

5. (14 bodova) Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$, a T linearni operator na $\mathbb{R}^2$ zadan s

$$T(x,y) = (\alpha x + \alpha y, \alpha x + \alpha y).$$

Odredite sve α takve da je T pozitivan operator. U tom slučaju odredite operator S takav da je $S^2 = T$.

Rezultati i termini uvida će biti oglašeni na web stranici kolegija.