

VEKTORSKI PROSTORI

Treći rok - 30. kolovoza 2024.

1. (14 bodova) Iskažite i dokažite teorem o dijagonalizaciji hermitskih operatora.
2. (14 bodova) Operator $A \in L(\mathbb{C}^4)$ ima u nekoj bazi od $\mathbb{C}^4$ matricu

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Koristeći algoritam za traženje minimalnog polinoma odredite minimalni polinom operatora A .

3. (14 bodova) Linearni operator $A \in L(\mathbb{C}^4)$ ima u kanonskoj bazi od $\mathbb{C}^4$ matricu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) Odredite Jordanovu formu od A i neku Jordanovu bazu od A .
- (b) Je li operator A nilpotentan? Odredite mu indeks nilpotentnosti.

4. (14 bodova) Operator $A \in L(\mathbb{C}^5)$ zadan je u kanonskoj bazi matričnim prikazom

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu operatora $\sin \frac{\pi(A^2 - 4A + 13)}{4}$ u kanonskoj bazi.

5. (14 bodova) Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$, a T linearni operator na $\mathbb{R}^2$ zadan s

$$T(x, y) = (\alpha x + \alpha y, \alpha x + \alpha y).$$

Odredite sve α takve da je T pozitivan operator. U tom slučaju odredite operator S takav da je $S^2 = T$.