

VEKTORSKI PROSTORI

Treći rok - 30. kolovoza 2024.

1. (14 bodova) Iskažite i dokažite teorem o minimalnom polinomu nilpotentnog operatora.
2. (14 bodova) Operator $A \in L(\mathbb{C}^4)$ ima u nekoj bazi od $\mathbb{C}^4$ matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Koristeći algoritam za traženje minimalnog polinoma odredite minimalni polinom operatora A .

3. (14 bodova) Linearni operator $A \in L(\mathbb{C}^8)$ ima Jordanovu formu

$$A(f) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odredite $\mu_A(\lambda)$ te algebarske i geometrijske kratnosti svih svojstvenih vrijednosti.

4. (14 bodova) Operator $A \in L(\mathbb{C}^5)$ zadan je u kanonskoj bazi matričnim prikazom

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite matricu operatora $\sin \frac{\pi(A^2 - 4A + 13)}{4}$ u kanonskoj bazi.

5. (14 bodova) Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor.
 - (a) (6 boda) Ako je $A \in L(V)$ hermitski operator za kojeg vrijedi $(A^{24} + I)(A^3 + I) = 0$, dokažite da je $A = -I$.
 - (b) (8 boda) Ako je $P \in L(V)$ ortogonalni projektor, odredite sve $a, b \in \mathbb{C}$ takve da je $aP + b(P - I)$ također ortogonalni projektor.