VEKTORSKI PROSTORI

2. kolokvij - popravni - 17. veljače 2020.

1. (**10 bodova**) Neka je $x_1, \dots, x_m$ konačan niz linearno nezavisnih vektora u konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru V. Dokažite da postoji niz ortonormiranih vektora $e_1, \dots, e_m$ takav da vrijedi

$$\langle x_1, \dots, x_k \rangle = \langle e_1, \dots, e_k \rangle \text{ za svaki } k = 1, \dots, m.$$

Napišite eksplicitne formule za vektore $e_1, \dots, e_m$ pomoću determinanti.

2. (**5 bodova**) Neka je $V = M_3(\mathbb{C})$ i $T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1. \end{bmatrix}$ Odredite $f(\mathcal{L}_T)$ kao polinom od $\mathcal{L}_T$, gdje je $\mathcal{L}_T \in L(V)$dan formulom $\mathcal{L}_T(A) = TA - AT$, a $f(x) = cos(\pi x) - e^x$.

3. (**5 bodova**) Nađite najbolju aproksimaciju matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

iz potprostora koji čine gornjetrokutaste matrice.

4. (**5 bodova**) Na kompleksnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^2$ linearni operator B zadan je matričnim zapisom u kanonskoj bazi

$$B_{(e)} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dokažite da je B pozitivan operator i odredite matrični zapis njegovog pozitivnog drugog korijena $\sqrt{B}$ u kanonskoj bazi.

5. (**5 bodova**) Neka su $A, B \in L(\mathbb{C}^n)$ normalni operatori koji komutiraju. Dokažite da vrijedi $\sigma(AB) \subset \sigma(A) \cdot \sigma(B)$. Nadalje, ako za iste A i B vrijedi $r(A) = d(B)$, postoji li unitaran operator $U \in L(\mathbb{C}^n)$ takav da je $AUBU^{-1} = 0$? (UPUTA: Sjetite se kako na matricu djeluje konjugiranje matricom permutacija, kao i toga da su matrice permutacija ortogonalne.)

6. (**5 bodova**) Neka je A linearni operator na kompleksnom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru koji zadovoljava

$$(A^3 + I)(A^2 - A + I) = 0.$$

(a) Ako je A normalan, dokažite da je A unitaran.

(b) Ako je A hermitski, dokažite da je $A = -I$.

Rezultati i termini uvida će biti oglašeni na web stranici kolegija.