

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 1. srpnja 2024.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Ostali predmeti (npr. mobiteli, pametni satovi, ...) ne smiju biti u blizini studenta.
- Sve odgovore detaljno obrazložite.
- $\mathcal{B}(a; r) := \{z \in \mathbf{C} : |z - a| < r\}$

ZADATAK 1. Neka je $U \subset \mathbf{C}$ neka domena.

- (i) (1 bod) Definirajte što znači da je funkcija $f: U \rightarrow \mathbf{C}$ kompleksno diferencijabilna u nekoj točki $z \in U$.
- (ii) (8 bodova) Neka je $f: U \rightarrow \mathbf{C}$, $w = c + id \in U$, te $f = u + iv$ za neke $u, v: U \rightarrow \mathbf{R}$. Uz koje uvjete na funkcije u i v će funkcija f biti kompleksno diferencijabilna u w ? Dokažite.
- (iii) (5 bodova) Postoji li nekonstantna funkcija $f: U \rightarrow \mathbf{C}$ takva da su i f i $\bar{f}$ holomorfne?
- (iv) (9 bodova) Pronađite cijelu funkciju f takvu da je za sve $x, y \in \mathbf{R}$

$$e^x \cos y = \operatorname{Im} \left(\int_{\partial \mathcal{B}(x+iy; 3)} \frac{f(w)}{w - x - iy} dw \right),$$

pri čemu je $\partial \mathcal{B}(x + iy; 3)$ orijentirano u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu.

RJEŠENJE.

- (i) Za funkciju $f: U \rightarrow \mathbf{C}$ kažemo da je kompleksno diferencijabilna u $z \in \mathbf{C}$ ako postoji limes

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

- (ii) f je kompleksno diferencijabilna u w ako i samo ako su u i v promatrane kao realne funkcije dvije realne varijable diferencijabilne u (c, d) te vrijede Cauchy–Riemannove jednačbe

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v, \\ \partial_y u &= -\partial_x v. \end{aligned}$$

Da bismo to dokazali, primjetimo najprije da je f kompleksno diferencijabilna u w s derivacijom $f'(w) = p + iq$ ako i samo ako je

$$\lim_{z \rightarrow w} \frac{f(z) - f(w) - (p + iq)(z - w)}{z - w} = 0. \quad (*)$$

Ako je $z = x + iy$, tada

$$(p + iq)(z - w) = p(x - c) - q(y - d) + i(q(x - c) + p(y - d)).$$

Razdvajanjem na realni i imaginarni dio dobivamo da (*) vrijedi ako i samo ako je

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (c,d)} \frac{u(x,y) - u(c,d) - (p(x-c) - q(y-d))}{\sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}} = 0$$

i

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (c,d)} \frac{v(x,y) - v(c,d) - (q(x-c) + p(y-d))}{\sqrt{(x-c)^2 + (y-d)^2}} = 0.$$

Usporedbom s diferencijabilnošću realnih funkcija, zaključujemo da će ovo vrijediti ako i samo ako su u i v diferencijabilne u (c, d) i

$$Du|_{(c,d)} = (p, -q), \quad Dv|_{(c,d)} = (q, p).$$

Oдавde jednostavno slijede Cauchy–Riemannove jednađbe.

(iii) Neka je $f = u + iv$ za neke $u, v: U \rightarrow \mathbf{R}$. Tada je $\bar{f} = u - iv$, pa iz Cauchy-Riemannovih jednađbi slijedi

$$\partial_x u = \partial_y v,$$

$$\partial_y u = -\partial_x v.$$

$$\partial_x u = -\partial_y v,$$

$$\partial_y u = \partial_x v.$$

Dakle, $\partial_x u = \partial_y v = \partial_y u = \partial_x v = 0$, odakle slijedi da su u i v su konstantne, pa je takva i f konstantna, što je kontradikcija.

Alternativno, ako su f i $\bar{f}$ holomorfne, onda je holomorfan i njihov zbroj $f + \bar{f} = 2 \operatorname{Re} f$. Međutim, ta funkcija poprima isključivo realne vrijednosti, a po zadatku s vježbi onda slijedi da je konstantna. Na sličan način, promatrajući razliku funkciju f i $\bar{f}$, zaključujemo da je i $\operatorname{Im} f$ konstantna funkcija.

(iv) Iz Cauchyjeve integralne formule znamo da je

$$f(x + iy) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B(x+iy;3)} \frac{f(w)}{w - x - iy} dw.$$

Uzimanjem realnog dijela dobivamo da je

$$\operatorname{Re} f(x + iy) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{B}(x+iy;3)} \frac{f(w)}{w - x - iy} dw \right) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\int_{\partial \mathcal{B}(x+iy;3)} \frac{f(w)}{w - x - iy} dw \right).$$

Dakle, trebamo pronaći cijelu funkciju f takvu da je

$$e^x \cos y = 2\pi \operatorname{Re} f(x + iy).$$

To možemo učiniti koristeći Cauchy–Riemannove jednadžbe ili čak napamet budući da znamo da je $e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$. Dakle, $f(z) = e^z/2\pi$.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 1. srpnja 2024.

ZADATAK 2.

- (ii) (1 bod) Iskažite osnovni teorem algebre.
- (i) (9 bodova) Neka je $f: \mathcal{B}(z; r) \rightarrow \mathbf{C}$ holomorfna funkcija takva da je $|f(w)| \leq |f(z)|$, za svaki $w \in \mathcal{B}(z; r)$. Dokažite da je tada $|f|$ konstantna funkcija.
- (iii) (12 bodova) Neka je f cijela funkcija. Pretpostavite da postoji limes

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} e^{|z|} \operatorname{Re} f(z),$$

te uz tu pretpostavku odredite koje sve realne vrijednosti može poprimiti.

RJEŠENJE.

- (i) Svaki nekonstantni kompleksni polinom ima nultočku u $\mathbf{C}$.
- (ii) Neka je $0 < \rho < r$. Iz Cauchyjeve integralne formule slijedi

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{B}(z; \rho)} \frac{f(w)}{w - z} dw \right|.$$

Uz $w = z + \rho e^{2\pi i \theta}$, dobijemo

$$\left| \int_0^1 f(z + \rho e^{2\pi i \theta}) d\theta \right| \leq \sup_{|z-w|=\rho} |f(w)| \leq |f(z)|.$$

Dakle, mora vrijediti jednakost. Međutim, jednakost može vrijediti samo ako je podintegralna funkcija konstantna. Slijedi da je $|f(w)|$ konstantna na krugu $\{w \in \mathbf{C} : |z - w| = \rho\}$, te je jednaka $|f(z)|$.

Budući da je $\rho \in (0, r)$ bio proizvoljan, slijedi da je $|f|$ konstantna na $\mathcal{B}(z; r)$.

- (iii) Pretpostavimo da je $\lim_{|z| \rightarrow \infty} e^{|z|} \operatorname{Re} f(z) = c \in \mathbf{R}$.

Tada postoji $R > 0$ takav da je za $|z| > R$

$$|\operatorname{Re} f(z) e^{|z|}| < |c| + 1.$$

Slijedi da je

$$|\operatorname{Re} f(z)| \leq \frac{|\operatorname{Re} f(z)e^{|z|}|}{R} < \frac{|c| + 1}{R},$$

pa je $\operatorname{Re} f(z)$ ograničena na komplementu zatvorenog kruga $\overline{\mathcal{B}(0; R)}$.

Budući da je f holomorfna, njen realni dio je neprekidna funkcija, pa je ograničena na kompaktnom skupu $\overline{\mathcal{B}(0; R)}$. Dakle, $\operatorname{Re} f(z)$ je ograničena funkcija.

Budući da je $|e^{f(z)}| = e^{\operatorname{Re} f(z)}$, zaključujemo da je i $e^{f(z)}$ ograničena cijela funkcija te je po Liouvilleovu teoremu konstantna. Kako je eksponencijalna funkcija periodična s periodom $2\pi i$, slijedi da postoji neki $w \in \mathbf{C}$ takav da je

$$f(z) \in \{w + 2k\pi i : k \in \mathbf{Z}\} \quad \text{za sve } z \in \mathbf{C}.$$

Kako je f neprekidna, proizlazi da je f konstantna, pa onda isto vrijedi i za $\operatorname{Re} f$. Neka je stoga $\operatorname{Re} f(z) = d \in \mathbf{R}$ za sve $z \in \mathbf{C}$.

Ako je $d \neq 0$, tada je

$$c = \lim_{|z| \rightarrow \infty} e^{|z|} \operatorname{Re} f(z) = d \cdot \lim_{|z| \rightarrow \infty} e^{|z|} \notin \mathbf{R}$$

S druge strane, ako je $d = 0$ (npr. za $f \equiv 0$), tada trivijalno dobivamo da je $c = 0$.

Dakle, 0 je jedina realna vrijednost koju dani limes može poprimiti.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 1. srpnja 2024.

ZADATAK 3.

- (i) (2 boda) Iskažite teorem o razvoju u Laurentov red funkcije f koja je holomorfna na kružnom vijencu $\mathcal{V}(a; r, R) = \{z \in \mathbf{C} : r < |z - a| < R\}$, za $a \in \mathbf{C}$ i $0 \leq r < R \leq \infty$.
- (ii) (8 bodova) Neka je $f: A \rightarrow \mathbf{C}$ holomorfna na $\mathcal{V}(a; r, R) = \{r < |z - a| < R\}$. Dokažite da su koeficijenti u razvoju od f u Laurentov red na $\mathcal{V}(a; r, R)$ jedinstveno određeni s f .
- (iii) (12 bodova) Neka je

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \log(-z^2 + 6z - 5),$$

pri čemu je $z \mapsto \log z$ glavna grana kompleksnog logaritma. Funkciju f razvijte u Laurentov red na kružnom vijencu $\mathcal{V}(3; 1, 2)$.

RJEŠENJE.

- (i) Neka je $f: \mathcal{V}(a; r, R) \rightarrow \mathbf{C}$ holomorfna. Tada f ima razvoj u konvergentni red

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

pri čemu je

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathcal{B}(a; \rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

za neki $r < \rho < R$. Dodatno, red konvergira uniformno na kompaktnim podskupovima kružnog vijenca.

- (ii) Neka su $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ i $\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^n$ dva razvoja funkcije f u Laurentov red na $\mathcal{V}(a; r, R)$, pri čemu je prvi od njih upravo razvoj iz prethodnog podzadatka. Koristeći formulu za koeficijente c_k , znamo da vrijedi

$$\begin{aligned} 2\pi i c_k &= \int_{\partial \mathcal{B}(a; \rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz \\ &= \int_{\partial \mathcal{B}(a; \rho)} \left(\sum_n b_n (z-a)^{n-k-1} \right) dz \\ &= \sum_n b_n \int_{\partial \mathcal{B}(a; \rho)} (z-a)^{n-k-1} dz \\ &= 2\pi i b_k, \end{aligned}$$

pri čemu je zamjena poretka integriranja i sumiranja opravdana uniformnom konvergencijom na kompaktu $\partial\mathcal{B}(a; \rho)$. Time slijedi $c_k = b_k$ za svaki $k \in \mathbb{Z}$.

(iii) Prvo primijetimo da argument logaritamske funkcije možemo faktorizirati tako da vrijedi

$$f(z) = \frac{\log(-z^2 + 6z - 5)}{z - 2} = \frac{\log((5 - z)(-1 + z))}{z - 2}.$$

Nadalje, brojnik možemo pojednostaviti na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\log((5 - z)(-1 + z)) &= \log((2 - (z - 3))(2 + (z - 3))) \\ &= \log\left(4\left(1 - \frac{z - 3}{2}\right)\left(1 + \frac{z - 3}{2}\right)\right) \\ &= \log 4 + \log\left(\left(1 - \frac{z - 3}{2}\right)\left(1 + \frac{z - 3}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

S predavanja znamo da vrijedi $\log(1 + z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ za $|z| < 1$. Kako je $z \in \mathcal{V}(3; 1, 2)$ ako i samo ako $1 < |z - 3| < 2$, vidimo da je $|\frac{z-3}{2}| < 1$ pa je na $\mathcal{V}(3; 1, 2)$ funkcija $\log((1 - \frac{z-3}{2})(1 + \frac{z-3}{2}))$ doista dobro definirana i holomorfna te je možemo razviti u Taylorov red oko 3, koji je jednak Laurentovom redu te funkcije prema teoremu o jedinstvenosti razvoja. Da bismo to učinili, uočimo najprije da vrijedi formula $\log(z_1 \cdot z_2) = \log(z_1) + \log(z_2)$, za $z_1 = 1 - \frac{z-3}{2}$ i $z_2 = 1 + \frac{z-3}{2}$ kada je $z \in \mathcal{V}(3; 1, 2)$. Razlog tome je što na tom kružnom vijencu vrijedi $|\frac{z-3}{2}| < 1$ pa je kut argumenta oba logaritma iz intervala $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Tada je

$$\log(-z^2 + 6z - 5) = \log 4 + \log\left(1 - \frac{z - 3}{2}\right) + \log\left(1 + \frac{z - 3}{2}\right)$$

i vrijedi

$$\log(-z^2 + 6z - 5) = \log 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} (z - 3)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n} (z - 3)^n = \log 4 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n n} (z - 3)^{2n}.$$

Nadalje, razvijmo $\frac{1}{z-2}$ u Laurentov red na $\mathcal{V}(3; 1, 2)$. Kako je $|\frac{1}{z-3}| < 1$ na $\mathcal{V}(3; 1, 2)$, imamo

$$\frac{1}{z - 2} = \frac{1}{z - 3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{z-3}} = \frac{1}{z - 3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z - 3)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z - 3)^{n+1}}.$$

Iz toga slijedi da je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(z - 3)^{n+1}} + \log 4 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n n} (z - 3)^{2n}$$

na $\mathcal{V}(3; 1, 2)$.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Ispit – 1. srpnja 2024.

ZADATAK 4.

- (i) (4 boda) Navedite parametrizaciju neke zatvorene glatke krivulje koja se oko točke $1 + i$ namota točno tri puta u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu.
- (ii) (4 boda) Precizno iskažite princip argumenta.
- (iii) (7 bodova) Neka je U domena, a γ jednostavna po dijelovima glatka zatvorena krivulja u U , orijentirana u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu. Neka su f i g holomorfne na U , te pretpostavimo da je $|f(z)| > |g(z)|$ za sve z na krivulji γ . Dokažite da f i $f + g$ imaju jednak broj nultočaka u domeni koju okružuje γ , pri čemu svaku nultočku računamo s odgovarajućim redom (kratnosti).
- (iv) (8 bodova) Neka su $z_1 \neq z_2$ dva kompleksna rješenja jednadžbe

$$z^7 + 5z^3 + 11z - 4 = 0.$$

Dokažite da je $|z_1| > 1$ ili $|z_2| > 1$.

RJEŠENJE.

- (i) Neka je $\gamma: [0, 6\pi] \rightarrow \mathbf{C}$ krivulja $\gamma(t) = 10e^{it}$. Lako se vidi da γ napravi tri kruga po kružnici $\partial\mathcal{B}(0; 10)$ u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu, te da se točka $1 + i$ nalazi u unutrašnjosti pripadnog kruga.
- (ii) Neka je U jednostavno povezana domena, a f funkcija koja je meromorfna na U s nultočkama $z_1, \dots, z_k$ i polovima $w_1, \dots, w_\ell$. Neka je γ po dijelovima glatka zatvorena krivulja takva da je $z_i, w_j \notin \text{Im}(\gamma)$ za sve i, j . Tada je

$$I(f \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^k \text{ord}(f; z_i) I_{\gamma}(z_i) - \sum_{j=1}^{\ell} \text{ord}(f, w_j) I(\gamma, w_j).$$

- (iii) Budući da je $|f| > |g|$ na γ , iz nejednakosti trokuta lako vidimo da f i $f + g$ nemaju nultočaka na γ . Definirajmo

$$h(z) = \frac{f(z) + g(z)}{f(z)} = 1 + \frac{g(z)}{f(z)},$$

te uočimo da su nultočke od $f + g$ ujedno i nultočke od h , te da su polovi od h nultočke od f . Iz dane pretpostavke lako vidimo da je za sve $z \in \gamma$

$$h(z) \in \mathcal{B}(1; 1) \subset \{z : \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Dakle, $h \circ \gamma$ je zatvorena krivulja u desnoj poluravnini $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, pa je samim time $I(h \circ \gamma; 0) = 0$. Iz principa argumenta slijedi da h ima jednak broj nultočaka i polova na D , ukoliko ih brojimo s pripadnim redovima (zbog pretpostavke za krivulju γ svi relevantni brojevi namotaja jednaki su $+1$).

Dokaz je gotov nakon što iskoristimo prethodno spomenutu vezu između nultočaka i polova funkcije h i nultočaka funkcija $f + g$ i f .

(iv) Neka je

$$f(z) = z^7 + 5z^3 + 11z - 4.$$

Odredimo broj nultočaka od f na u krugu $\mathcal{B}(0; 1)$. Neka je $g(z) = 11z$ i $h(z) = z^7 + 5z^3 - 4$. Tada za $z \in \partial\mathcal{B}(0; 1)$, tj. $|z| = 1$, imamo

$$|h(z)| = |z^7 + 5z^3 - 4| < 10 < |11z| = |g(z)|.$$

Iz Rouchéovog teorema zaključujemo da u $\mathcal{B}(0; 1)$ funkcije g i $g + h = f$ imaju jednako mnogo nultočaka, dakle jednu. Budući da smo pretpostavili da su z_1 i z_2 dvije različite nultočke, bar jedna mora biti izvan kruga.