

3. Diskretne slučajne varijable

3.1. Definicija i osnovna svojstva

U nastavku $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ predstavlja proizvoljan vjerojatnosni prostor.

Definicija 3.1. Slučajna varijabla je svaka funkcija $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$\{X \leq x\} \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

pri čemu je

$$\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = X^{-1}((-\infty, x]).$$

Napomena 3.2

- Za slučajnu varijablu X zanimat će nas vjerojatnosti

$$\mathbb{P}(X \in B) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}),$$

za razne skupove $B \subseteq \mathbb{R}$ [npr. $B = \langle -\infty, x], [a, b], \{x\}$].

- Može se pokazati da (3.1) povlači puno više, tj. da je u tom slučaju $\{X \in B\} \in \mathcal{F}$ za "većinu" $B \subseteq \mathbb{R}$, pa je vjerojatnost $\mathbb{P}(X \in B)$ dobro definirana.
- U nastavku uvjet (3.1) nećemo provjeravati [tj. pretpostavit ćemo da je zadovoljen]. Uočimo da je taj uvjet trivijalno zadovoljen ako je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

- Za slučajnu varijablu $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, neka je

$$D_X := \text{Im}(X) = \{X(\omega) : \omega \in \Omega\},$$

skup svih vrijednosti koje X može poprimiti.

Definicija 3.3. Slučajnu varijablu $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je **diskretna** ako je D_X konačan ili prebrojiv.

- Ako je $D_X \subseteq B$ za neki $B \subseteq \mathbb{R}$, često to označavamo s " $X \in B$ "
- npr. $X \geq 0$ znači da je $D_X \subseteq [0, \infty)$.

Primjer 3.4

(a) Bacamo dvije kocke te neka je

$X :=$ zbroj brojeva na kockama,

tj. $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^2$, $X(\omega) := \omega_1 + \omega_2$, $\forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$.

$\rightsquigarrow$ Budući da je $X : \Omega \rightarrow D_X := \{2, \dots, 12\} \subseteq \mathbb{R}$, X je diskretna slučajna varijabla [kao i svaka druga slučajna varijabla na ovom vjerojatnosnom prostoru].

(b) Slučajno biramo broj iz $\langle 0, 10 \rangle$, te stavimo

$X :=$ taj broj, $Y :=$ najveće cijelo tog broja,

tj. $\Omega = \langle 0, 10 \rangle$, te $X(\omega) := \omega$, $Y(\omega) := \lfloor \omega \rfloor$, $\forall \omega$.

$\rightsquigarrow$ i X i Y slučajne varijable, ali samo je Y diskretna ($D_X = \langle 0, 10 \rangle$, $D_Y = \{0, 1, \dots, 9\}$).

- (i) Slučajne varijable tipično označavamo velikim slovima: $X, Y, U, \dots$, a njihove vrijednosti ("**realizacije**") s malim slovima: $x, y, u, \dots$ (tj. $x = X(\omega)$ za neki $\omega \in \Omega$).
- (ii) Ako je X *diskretna* slučajna varijabla, često ćemo elemente od D_X označiti s

$$D_X = \{a_i : i \in I\} = \{a_1, a_2, \dots\},$$

gdje je $I = \{1, 2, \dots, n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$, ili $I = \mathbb{N}$ [I dakle također ovisi o X , ali radi jednostavnosti to nećemo pisati.]

Napomena 3.5 (Slučajni element)

Općenito, ako je D proizvoljan skup, funkciju $X : \Omega \rightarrow D$ nazivamo **slučajni element** u D .

Na primjer,

- $D = \mathbb{R} \rightsquigarrow X$ je slučajna varijabla;
- $D = \mathbb{R}^k \rightsquigarrow X$ je **slučajni vektor** [iduće poglavlje];

$D =$ skup svih grafova s n vrhova $\rightsquigarrow X$ je **slučajan graf** [npr. Erdős-Rényijev graf. Kako bi tu konstruirali $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $X : \Omega \rightarrow D$?]

- $D = C[0, 1] \rightsquigarrow X$ je **slučajna funkcija** [npr. Brownovo gibanje];

Napomena 3.5 (Slučajni element)

- Slučajni element X je **diskretan** ako je slika $D_X \subseteq D$ najviše prebrojiv skup; to mogu biti i relativno komplicirani slučajni elementi kao što je npr. slučajni graf.
- Većina definicija i rezultata koje ćemo navesti u ovom poglavlju vrijede i za **diskretne** slučajne elemente uz potpuno iste dokaze – jednostavno se elementi od D_X poredaju u niz $a_1, a_2, \dots$; to ćemo direktno koristiti u poglavlju o diskretnim slučajnim vektorima.
- Iznimka su rezultati gdje se zaista koristi struktura prostora $\mathbb{R}$ – npr. kad govorimo o **očekivanju** slučajne varijable.

3.1.1. Distribucija diskretne slučajne varijable

- Za diskretnu slučajnu varijablu X , skup $D_X = \{a_i : i \in I\}$ zajedno s vjerojatnostima

$$p_i := \mathbb{P}(X = a_i), i \in I, \quad (3.2)$$

zovemo **distribucijom** (ili **razdiobom**) slučajne varijable X .

- Distribuciju često zapisujemo u obliku **tablice**:

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

[Gornju relaciju čitamo kao " X ima distribuciju ..."]

Primjer 3.6. Ako je X broj koji je pao na simetričnoj kocki,

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

što predstavlja tzv. diskretnu **uniformnu** razdiobu na $\{1, 2, \dots, 6\}$.

Iz (3.2) imamo da nužno vrijedi (DZ)

$$p_i \geq 0, \forall i \in I, \text{ te } \sum_{i \in I} p_i = 1, \quad (3.3)$$

tj. $(p_i : i \in I)$ je **distribucija na D_X** (vidi Prop. 1.12).

Propozicija 3.7. Neka je $(p_i : i \in I)$ proizvoljna distribucija na konačnom ili prebrojivom skupu $D = \{a_i : i \in I\} \subseteq \mathbb{R}$. Tada **postoji** vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i (diskretna) slučajna varijabla $X : \Omega \rightarrow D$ t.d. X ima distribuciju točno $(p_i : i \in I)$, tj.
 $\mathbb{P}(X = a_i) = p_i, \forall i \in I$.

$\rightsquigarrow$ **dokaz na ploči**

- Ako je $X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & \dots \end{pmatrix}$, za sve $B \subseteq \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I: a_i \in B} \{X = a_i\}\right) = \sum_{a_i \in B} \mathbb{P}(X = a_i) = \sum_{a_i \in B} p_i.$$

pri čemu je " $a_i \in B$ " (ovdje, ali i u nastavku) skraćena oznaka za " $i \in I : a_i \in B$ ".

- Iz gornje relacije slijedi da ako slučajna varijabla X definirana na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i slučajna varijabla Y definirana na $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ imaju istu distribuciju, vrijedi

$$\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}'(Y \in B), \quad \forall B \subseteq \mathbb{R}.$$

- Najčešće nas zanimaju stvari koje ovise samo o distribuciji slučajne varijable, tj. najčešće (ali ne i uvijek) nam sam vjerojatnosti prostor te konkretna konstrukcija slučajne varijable nisu bitni. Tada je jedino bitno da postoji slučajna varijabla s danom distribucijom, a to slijedi iz prethodne propozicije.

Vjerojatnosna funkcija mase

- Za diskretnu slučajnu varijablu X definiramo njenu **vjerojatnosnu funkciju mase**¹ ili **diskretnu (vjerojatnosnu) funkciju gustoće** $f_X := \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ sa

$$f_X(x) := \mathbb{P}(X = x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

- Očito vrijedi

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots\dots\dots \\ p_1 & p_2 & \dots\dots\dots \end{pmatrix}$$

akko

$$f_X(x) = \begin{cases} p_i, & \text{ako } x = a_i \text{ za neki } i \in I, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

¹Engleski izraz je **probability mass function** ili skraćeno **p.m.f.**. Često se koristi i intuitivnija oznaka p_X umjesto f_X .

Vjerojatnosna funkcija mase

- Drugim riječima, f_X **jedinstveno** određuje distribuciju od X .
- U ovim bilješkama nećemo previše koristiti f_X , ali to je samo stvar notacije.
- Ona je korisna npr. u statistici jer možemo na **unificiran** način tretirati diskretne i neprekidne slučajne varijable (vidjet ćemo primjere kasnije).

3.1.2. Neke poznate distribucije

(tj. često se javljaju u primjenama)

↪ **na ploči** (uz slike na slideovima)

Binomna razdioba

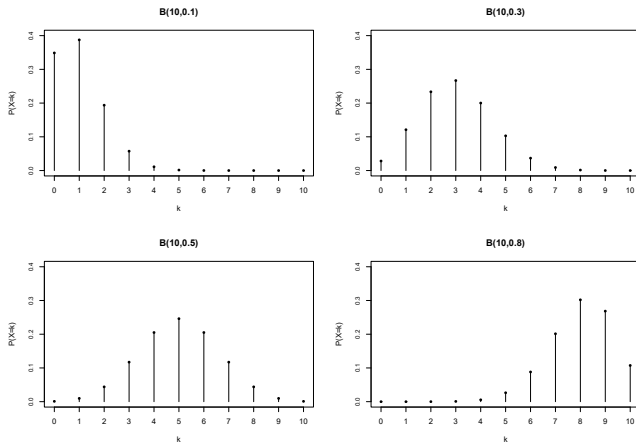


Figure: Grafički prikaz binomne razdiobe (ili ekvivalentno njene vjerovatnosne funkcije mase) za $n = 10$ i razne parametre p .

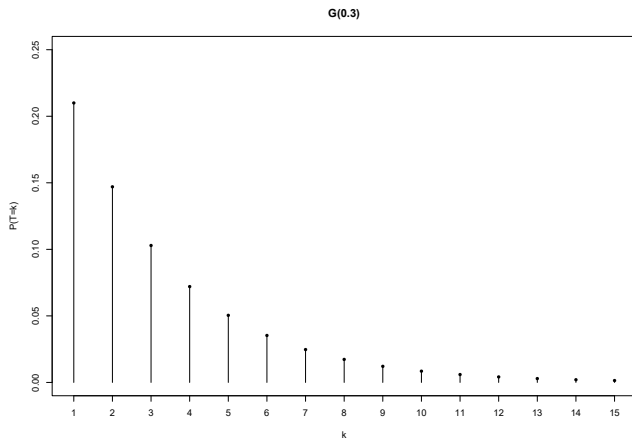


Figure: Grafički prikaz geometrijske razdiobe na $\mathbb{N}$ za $p = 0.3$.

3.1.3. Funkcija slučajne varijable

- Ako je X diskretna slučajna varijabla i $g : D_X \rightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna funkcija, tada je funkcija $g(X) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definirana sa

$$g(X)(\omega) := g(X(\omega)), \omega \in \Omega,$$

ponovno diskretna slučajna varijabla jer je $D_{g(X)} = g(D_X)$ ponovno najviše prebrojiv skup.

Primjer 3.13. Ako je

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

te $g(x) = x^+ := \max\{0, x\}$, imamo da je $X^+ = g(X) \in \{0, 1\}$, te X^+ ima distribuciju...

Propozicija 3.14 (Općenito, imamo...)

Ako je $D_X = \{a_i : i \in I\}$ te $D_{g(X)} = \{g(a_i) : i \in I\} =: \{b_j : j \in J\}$, distribucija od $g(X)$ dana je s

$$\mathbb{P}(g(X) = b_j) = \sum_{i \in I: g(a_i) = b_j} \mathbb{P}(X = a_i), \quad \forall j \in J.$$

Dokaz. Pogledati sami.