

Vjerojatnost

Uvodno predavanje

Pravila polaganja

- Kolokviji ($2 \times 50\%$, usmeni nije obavezan) – minimalno pola bodova za prolaz
- Završni ispit – u pravilu i pismeni (cijelo gradivo) i usmeni

Predavanja

- kreda i ploča, povremeno slide-ovi
- bilješke na webu

Vježbe

- zadaci na webu
- rješavanje zadataka **unaprijed** te rješavanje u **grupama** na satu – više detalja na samim vježbama
- zadaci s vježbi su **dobra priprema** za kolokvij/ispit

1. Vjerojatnost

[Formalna definicija]

1.1. Uvod

Primjeri nekih "vjerojatnosnih" tvrdnji:

- vjerojatnost da će simetričan novčić pokazati pismo je $\frac{1}{2}$
~> **klasična vjerojatnost** (simetrija)
- vjerojatnost da će nesimetričan novčić pokazati pismo je 0.61
~> **asimptotski pristup** (zakon velikih brojeva)
- vjerojatnost da će sutra u Zagrebu biti orkanska oluja je 1%
~> **subjektivna vjerojatnost** (statistika)

Cilj ovog kolegija je dati **preciznu** matematičku teoriju vjerojatnosti koja je

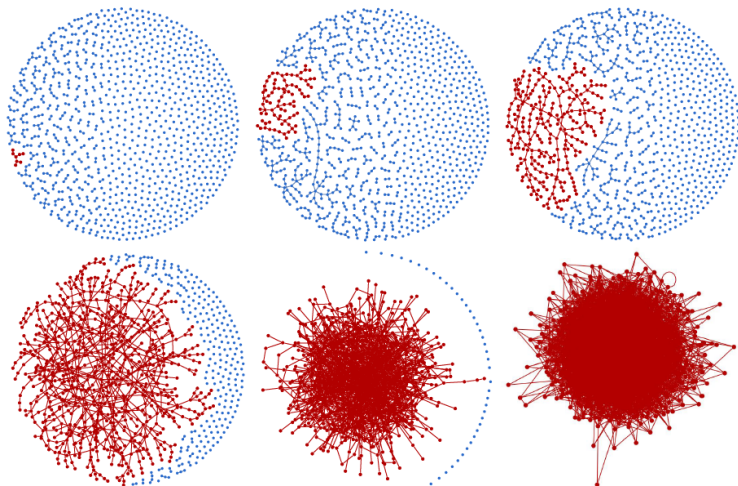
- u skladu s intuicijom u jednostavnim primjerima (npr. u slučaju simetrije),
- daje nam odgovore i kada nemamo dobru intuiciju, te
- je važna grana moderne matematike s primjenama u raznim disciplinama kao npr. u statistici, optimizaciji, matematičkoj analizi, teoriji grafova ...
- primjerice, Abelovu nagradu za 2024. godinu dobio je Michel Talagrand, između ostalog za svoj rad na tzv. **koncentracijskim nejednakostima**, a 2022. Fieldsovu medalju dobio je Hugo Duminil-Copin za svoj rad u **teoriji perkolacija**.

Neki (klasični) primjeri:

- Lažno pozitivni testovi
- Problem rođendana
- Zakon arkus sinusa i duga vodstva

↪ vidjeti bilješke

Erdős–Rényi slučajan graf



Svaki par od ukupno n vrhova je spojen bridom s vjerojatnosti $p = \frac{\varepsilon}{n}$. Gore je $n = 1000$, te je c , s lijeva na desno, 0.1, 0.5, 1, 1.1, $\frac{\log(n)}{2}$, $2 \log(n)$.

1.2. Vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

- Neformalno, (slučajni) **pokus** je svaka procedura ("mehanizam") čiji ishod nije jednoznačno određen. Na primjer, (i) bacanje novčića, (ii) cijene dionica na burzi sutra ...
- **Vjerojatnosni prostor** predstavlja matematički model za dani pokus, a sastoji se od tri komponente:
 - (i) skupa svih mogućih ishoda pokusa (oznaka obično Ω)
 $\rightsquigarrow$ elemente od Ω (tj. ishode pokusa) obično označavamo s ω
te ih još zovemo **elementarni događaji**, a Ω **prostor elementarnih događaja**.
 - (ii) familije podskupova od Ω čije elemente zovemo **događaji** (oznaka obično $\mathcal{F}$, pri čemu je dakle $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ¹)
 - (iii) **vjerojatnosti** koju pridružujemo svakom događaju (za $A \in \mathcal{F}$, oznaka obično $\mathbb{P}(A)$).

¹ $\mathcal{P}(\Omega)$ je oznaka za partitivni skup od Ω , tj. skup svih podskupova skupa Ω . ▶

Primjer 1.1

Bacamo simetričnu kocku.

(i) za Ω je prirodno uzeti

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(ii) primjeri događaja su²

$$A = \{\text{pao je paran broj}\} = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$$

$$B = \{\text{pao je broj 6}\} = \{6\} \subseteq \Omega$$

(iii) za vjerojatnosti je prirodno staviti

$$\mathbb{P}(A) = [\text{simetrija}] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B) = [\text{simetrija}] = \frac{1}{6}$$

²Događaje često opisujemo riječima.

1.2.1. Događaji

Kažemo da se događaj $A \in \mathcal{F}$ **dogodio** ako se dogodio ishod $\omega \in \Omega$ takav da je $\omega \in A$. Za događaje $A, B \in \mathcal{F}$:

- $A^c = \Omega \setminus A$ predstavlja događaj "A se nije dogodio";
- $A \cup B =$ "dogodio se A ili B";
- $A \cap B =$ "dogodili su se i A i B";
- $A \setminus B =$ "dogodio se A, ali ne i B";
- $A \subseteq B$ (tj. $\omega \in A$ povlači $\omega \in B$) interpretiramo kao "ako se dogodio A, dogodio se i B";
- $A \cap B = \emptyset$ interpretiramo kao "ne mogu se istovremeno dogoditi i A i B";
- Ω nazivamo "siguran događaj", a $\emptyset$ "nemoguć događaj".

Napomena

- Bitno je naviknuti se na ovu vezu između događaja i skupova/skupovnih operacija!
- Iz **tehničkih** razloga, neće uvijek moći vrijediti $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ [tj. da su **svi** $A \subseteq \Omega$ događaji]. Ipak, uvijek ćemo tražiti da $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ zadovoljava svojstva tzv. **σ -algebre**.

↪ nastavak na ploči.