Poglavlje 1

Vektori

Koordinatizacija

Definicija: *Neka je* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *baza prostora* V^3. *Tada za svaki* $\vec{x} \in V^3$ *postoje jedinstveni skalari* $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$.

Koordinatni prikaz *vektora* $\vec{x}$ *je zapis* $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. *Skalare* x_1, x_2, x_3 *zovemo* ***koordinate vektora*** $\vec{x}$.

Napomena.

- Slično u prostoru V^2 svaki vektor možemo zapisati kao uređeni par realnih brojeva, tj. kao $\vec{x} = (x_1, x_2)$.
- Koordinatni prikaz vektora ovisi o početno odabranoj bazi prostora.

Operacije s vektorima u koordinatnom prikazu:
Neka su $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektori u V^3. Tada vrijedi:

1) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$,

2) $\lambda\vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$,

3) $\vec{a} = \vec{b}$ ako i samo ako je $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3$,

4) $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su linearno zavisni ako je jedan od njih nulvektor ili ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $b_i = \lambda a_i$ za sve $i = 1, 2, 3$ (koordinate vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su međusobno proporcionalne).

Primjer 1 (Zadatak 1.29.)**:** *Prikažite vektor* $(3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ *kao linearnu kombinaciju vektora* $(1, 1, 1)$ *i* $(-2, 3, 1)$.

Rješenje. Trebamo odrediti brojeve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$\left(3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \alpha(1, 1, 1) + \beta(-2, 3, 1) = (\alpha - 2\beta, \alpha + 3\beta, \alpha + \beta).$$

Uspoređivanjem pripadnih koordinata iz gornje jednakosti dobivamo sustav

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 3 \\ \alpha + 3\beta = \frac{1}{2} \\ \alpha + \beta = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobivamo da je $\alpha = 2$ i $\beta = -\frac{1}{2}$, tj.

$$\left(3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = 2(1,1,1) - \frac{1}{2}(-2,3,1).$$

Primjer 2 (Zadatak 1.30.)**:** *Odredite sve* $a \in \mathbb{R}$ *tako da vektor* $(-1,-1,7)$ *bude moguće prikazati kao linearnu kombinaciju vektora* $(1,-1,1)$ *i* $(a,1,2)$.

Rješenje. Trebamo odrediti sve brojeve $a \in \mathbb{R}$ za koje postoje brojevi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi

$$(-1,-1,7) = \alpha(1,-1,1) + \beta(a,1,2) = (\alpha + \beta a, -\alpha + \beta, \alpha + 2\beta).$$

Uspoređivanjem koordinata dobivamo sustav

$$\begin{cases} \alpha + \beta a = -1 \\ -\alpha + \beta = -1 \\ \alpha + 2\beta = 7 \end{cases}.$$

Iz zadnje dvije jednadžbe sustava dobivamo da je $\alpha = 3$ i $\beta = 2$. Uvrštavanjem natrag u prvu jednadžbu sustava dobivamo konačno da je $a = -2$.

Primjer 3 (Zadatak 1.31.)**:** *Jesu li vektori linearno zavisni (kolinearni) ili nezavisni:*

(a) $(2,-3)$ *i* $(-4,6) \rightsquigarrow$ *zavisni jer je* $(-4,6) = -2 \cdot (2,-3)$,

(b) $(2,3)$ *i* $(-4,6) \rightsquigarrow$ *nezavisni,*

(c) $(2,0)$ *i* $(0,1) \rightsquigarrow$ *nezavisni,*

(d) $(2,-3,1)$ *i* $(4,6,-2) \rightsquigarrow$ *nezavisni,*

(e) $(2,-3,0)$ *i* $(4,0,2) \rightsquigarrow$ *nezavisni,*

(f) $(-2,-3,1)$ *i* $(4,6,-2) \rightsquigarrow$ *zavisni jer je* $(4,6,-2) = -2(-2,-3,1)$,

(g) $(1,1,1)$, $(1,1,0)$ *i* $(1,0,0) \rightsquigarrow$ *nezavisni.*

Determinanta: Linearnu nezavisnost vektora možemo provjeriti i pomoću determinante:

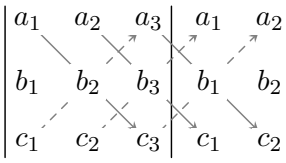
- Neka su $\vec{a} = (a_1, a_2)$ i $\vec{b} = (b_1, b_2)$ vektori u V^2. **Determinanta reda** 2 je

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

- Neka su $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektori u V^3. **Determinanta reda** 3 je

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

Napomena. Determinantu reda 3 možemo računati koristeći *Sarrusovo pravilo.* Dopisivanjem prva dva stupca determinante te oduzimanjem zbroja umnožaka elemenata na glavnim i sporednim dijagonalama daje izraz za determinantu reda 3.



$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2) - (a_3b_2c_1 + a_1b_3c_2 + a_2b_1c_3).$$

Propozicija: *Vrijede sljedeće tvrdnje*

(i) Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ u V^2 su linearno nezavisni ako i samo ako je $\det(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$.

(ii) Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ u V^3 su linearno nezavisni ako i samo ako je $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$.

Primjer 4:

1) Jesu li $(3, -2)$ i $(4, 5)$ linearno nezavisni?

2) Odredite sve brojeve $k \in \mathbb{R}$ za koje su vektori (k, k) i $(4, 2k)$ linearno nezavisni?

3) Jesu li vektori $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$ i $(0, 1, 2)$ linearno nezavisni?

Rješenje.

1) Kako je

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 = 23 \neq 0,$$

slijedi da su vektori $(3, -2)$ i $(4, 5)$ linearno nezavisni.

2) Računamo determinantu tih vektora

$$\begin{vmatrix} k & k \\ 4 & 2k \end{vmatrix} = 2k^2 - 4k = 2k(k - 2).$$

Gornja determinanta je različita od 0 ako i samo ako je $k \neq 0$ i $k \neq 2$.

Dakle, vektori će biti linearno nezavisni za sve realne brojeve $k \neq 0, 2$.

3)

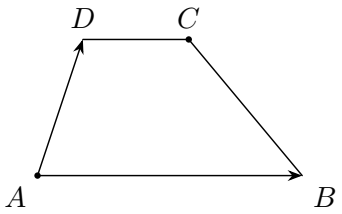
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2)$$
$$= 4 + 1 - 3 - 2 = 0.$$

Vektori su linearno zavisni.

Zadatak 1.23. Neka je $ABCD$ trapez s osnovicama $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ takvima da je $|CD| = \frac{2}{5}|AB|$. Zapišite vektor $\overrightarrow{CB}$ u bazi $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$.

Rješenje.

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$$
$$= -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.$$

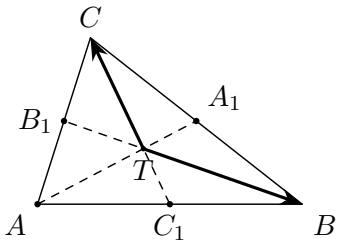


Zadatak 1.24. Neka je T težište trokuta ABC. Odredite koordinate vektora $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AT}$ u $\{\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}\}$.

Rješenje. Iz Zadatka 1.5 znamo da vrijedi

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC}) = \vec{0}.$$

Stoga je $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = (1, 1)$.



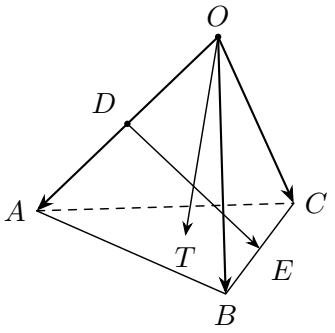
Nadalje, redom imamo

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB} = (1, 1) + (1, 0) = (2, 1),$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TC} = -\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = (-1, 1),$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TC} = (1, 1) + (0, 1) = (1, 2).$$

Zadatak 1.25. Dan je tetraedar $OABC$. U bazi $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ odredite koordinate vektora $\overrightarrow{DE}$ i $\overrightarrow{OT}$ pri čemu su D i E redom polovišta bridova $\overline{OA}$ i $\overline{BC}$, a T težište trokuta ABC.

Rješenje. Korištenjem formula za radijvektor težišta i polovišta (vidi Primjer 5 iz poglavlja o radijvektorima) redom imamo

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),$$
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$



Zadatak 1.26. Za koje vrijednosti parametra m vektori $\vec{a} = (1, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 4, m)$ i $\vec{c} = (2, m + 2, 6)$ čine bazu prostora V^3?

Rješenje. Tri vektora u V^3 čine bazu ako i samo ako su linearno nezavisni, tj. ako i samo ako je njihova determinanta različita od 0.
Determinanta vektora iz zadatka je

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & m \\ 2 & m+2 & 6 \end{vmatrix} = -m^2 + m + 12.$$

Rješenja kvadratne jednadžbe $-m^2 + m + 12 = 0$ su $m_1 = -3$ i $m_2 = 4$.
Dakle, $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$ za sve realne brojeve $m \neq -3, 4$.

Zadatak 1.27.

(a) Jesu li $\vec{a} = (2, 3, 1)$ i $\vec{b} = (-1, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ kolinearni?

(b) Jesu li $\vec{a}$ i $\vec{b}$ komplanarni?

(c) Jesu li $\vec{f} = (1, 1, 0)$, $\vec{g} = (1, -1, 0)$ i $\vec{h} = (0, 2, 0)$ komplanarni?

Rješenje.

(a) Vektori su kolinearni jer je $\vec{a} = -2\vec{b}$.

(b) Da, bilo koja dva vektora u V^3 su komplanarna.

(c) Uočimo da je $\vec{h} = \vec{f} - \vec{g}$, iz čega slijedi da su vektori $\vec{f}$, $\vec{g}$ i $\vec{h}$ komplanarni.

Zadatak 1.28. Dani su vektori $\vec{p} = (t, 1, 4)$, $\vec{q} = (1, -2t, 0)$ i $\vec{r} = (3t, -3, 4)$. Odredite $t \in \mathbb{R}$ tako da $\vec{r}$ bude linearna kombinacija vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$.

Rješenje. Ako je vektor $\vec{r}$ linearna kombinacija vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ tada su vektori $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\vec{r}$ linearno zavisni, tj. njihova determinanta je jednaka 0. Dakle, mora vrijediti

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 4 \\ 1 & -2t & 0 \\ 3t & -3 & 4 \end{vmatrix} = -8t^2 - 12 + 24t^2 - 4 = 16t^2 - 16 = 0.$$

Rješavanjem gornje kvadratne jednadžbe dobivamo $t \pm 1$.
Preostaje još provjeriti da su $t = 1$ i $t = -1$ zaista rješenja.
Za $t = 1$ imamo da je $\vec{r} = \vec{p} + 2\vec{q}$.
Za $t = -1$ imamo da je $\vec{r} = \vec{p} - 2\vec{q}$.

Zadatak 1.33. U ovisnosti o parametrima $m, n \in \mathbb{R}$ ispitajte linearnu nezavisnost vektora:

(a) $(1, m, 1)$, $(m, 1, -1)$, $(1, -1, 1)$,

(b) $(m, m, 2)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 1)$,

(c) $(1, m, 1)$, $(n, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$.

Rješenje.

(a)
$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2m - m^2 = -(1 + m)^2.$$

Gornja determinanta je jednaka 0 samo za $m = -1$.

Dakle, za $m = -1$ će vektori biti linearno zavisni, a za sve realne brojeve $m \neq -1$ će vetkori biti linearno nezavisni.

(b)
$$\begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Budući da je gornja determinanta jednaka 0 za sve realne brojeve m, slijedi da su vektori iz zadatka linearno zavisni za sve realne brojeve m.

(c)
$$\begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -mn + m + n - 1 = -(m - 1)(n - 1).$$

Gornja determinanta će biti jednaka 0 ako je $m = 1$ ili $n = 1$.

Dakle, za $m = 1$ ili $n = 1$ su vektori iz zadatka linearno zavisni.

Za $m \neq 1$ i $n \neq 1$ vektori iz zadat su linearno nezavisni.