

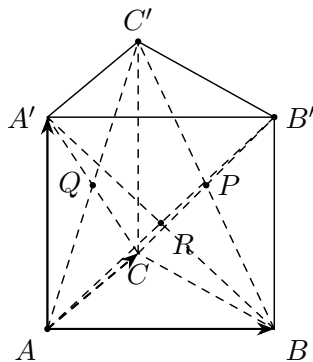
Poglavlje 1

Vektori

Zadatak 1.7. Neka je $ABCA'B'C'$ trostrana prizma, a točke P, Q, R su redom središta stranica $BCC'B'$, $ACC'A'$, $ABB'A'$. Pomoću vektora $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$ prikažite vektore $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{AQ}$ i $\overrightarrow{RP}$.

Rješenje. Redom imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'C} &= \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AA'} + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, \\ \overrightarrow{AQ} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \\ \overrightarrow{RP} &= \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC'} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c}) + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{b}.\end{aligned}$$



Zadatak 1.8. Neka je $ABCD A'B'C'D'$ kvadar. Dokažite da vektori $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{B'D}$, $\overrightarrow{CA'}$ i $\overrightarrow{D'B}$ čine (prostorni) četverokut, tj. da vrijedi

$$\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{B'D} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{D'B} = \vec{0}.$$

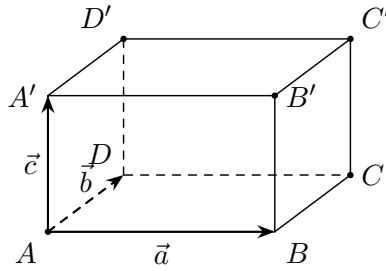
Rješenje. Označimo s $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{AA'}$. Redom imamo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC'} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \\ \overrightarrow{B'D} &= \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CA'} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \\ \overrightarrow{D'B} &= \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}.\end{aligned}$$

Sada konačno možemo izračunati

$$\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{B'D} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{D'B} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}.$$



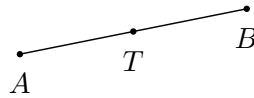
Definicija: Radijvektor (vektor položaja) točke A je usmjerena dužina $\overrightarrow{OA}$ s početkom u odabranoj (fiksnoj) točki O i krajem u točki A .

Definicija: Kažemo da točka T dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru $\lambda \in \mathbb{R}$ ako je $\overrightarrow{AT} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

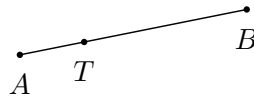
Napomena. Pojam ima smisla samo kada se točke A, B i T nalaze na istom pravcu.

Primjer 1:

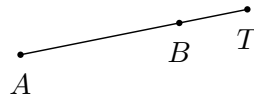
- Za $\lambda = \frac{1}{2} \rightsquigarrow T$ je polovište dužine $\overline{AB}$.



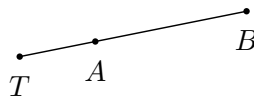
- Za $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle \rightsquigarrow T$ je na dužini $\overline{AB}$.



- Za $\lambda \geq 1 \rightsquigarrow T$ je na produžetku dužine $\overline{AB}$ preko vrha B .

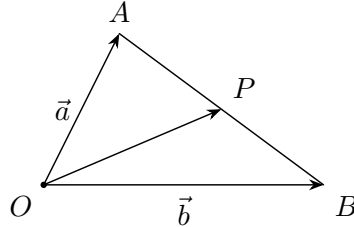


- Za $\lambda \leq 0 \rightsquigarrow T$ je na produžetku dužine $\overline{AB}$ preko vrha A .



Primjer 2:

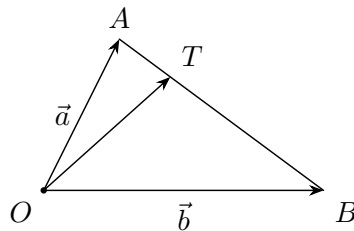
- 1) Neka su A i B točke s radijvektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Odredite radijvektor polovišta P dužine $\overline{AB}$.



Izrazimo vektor $\overrightarrow{OP}$ preko vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

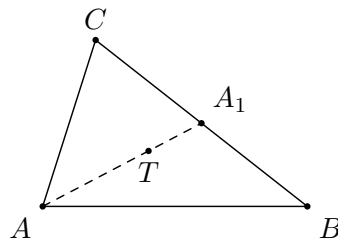
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA}) \\ &= \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).\end{aligned}$$

- 2) Neka su A i B točke s radijvektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Odredite radijvektor točke T koja dužinu $\overline{AB}$ dijeli u omjeru λ .



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \lambda(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \vec{a} + \lambda(\vec{b} - \vec{a}) = (1 - \lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b}\end{aligned}$$

- 3) Odredite radijvektor težišta T trokuta ABC .

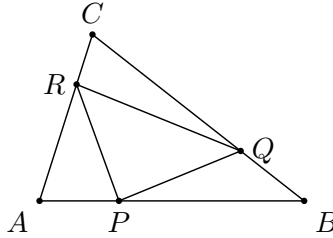


Neka su $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ redom radijvektori točaka A , B i C te neka je A_1 polovište dužine $\overline{BC}$. Kako težište T dijeli težišnicu $\overline{AA_1}$ u omjereu $2 : 1$, redom imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA_1}) \\
&= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})\right) \\
&= \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).
\end{aligned}$$

Zadatak 1.9. Neka točke P, Q i R dijele redom stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ trokuta ABC u istom omjeru. Dokažite da se težišta trokuta ABC i PQR podudaraju.

Rješenje. Neka je točka T težište trokuta ABC , a T_1 težište trokuta PQR . Označimo s $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ radijvektore točaka A , B i C te neka točke P , Q i R dijele pripadne stranice trokuta ABC u omjeru λ . Da bi dokazali da je $T = T_1$ dovoljno nam je pokazati da su radijvektori točaka T i T_1 jednaki.



Iz prijašnjeg primjera imamo da za radijvektore težišta trokuta ABC i PQR vrijedi

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}), \\
\overrightarrow{OT_1} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}).
\end{aligned}$$

Budući da točke P , Q i R dijele pripadne stranice trokuta ABC u omjeru λ , iz prethodnog primjera također imamo da je

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= (1 - \lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b}, \\
\overrightarrow{OQ} &= (1 - \lambda)\vec{b} + \lambda\vec{c}, \\
\overrightarrow{OR} &= (1 - \lambda)\vec{c} + \lambda\vec{a}.
\end{aligned}$$

Sada konačno možemo izraziti vektor $\overrightarrow{OT_1}$ preko $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Redom imamo

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OT_1} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}) \\
&= \frac{1}{3}\left((1 - \lambda)\vec{a} + \lambda\vec{b} + (1 - \lambda)\vec{b} + \lambda\vec{c} + (1 - \lambda)\vec{c} + \lambda\vec{a}\right) \\
&= \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \overrightarrow{OT}.
\end{aligned}$$

Dakle, $\overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OT}$ iz čega slijedi da se težišta T i T_1 podudaraju.

Zadatak 1.10. Neka su K, L, M i N redom polovišta stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ i $\overline{DE}$ peterokuta $ABCDE$ i neka su P i Q polovišta dužina $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$. Dokažite da su pravci AE i PQ paralelni i da je $|PQ| = \frac{1}{4}|AE|$.

Rješenje. Označimo malim slovima radijvektore pripadnih točaka, tj. $\vec{a}$ je radijvektor točke A , $\vec{b}$ je radijvektor točke B ...

Kako su točke K, L, M i N redom polovišta stranica $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ i $\overline{DE}$ iz Primjera 2 slijedi

$$\begin{aligned}\vec{k} &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \\ \vec{l} &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \\ \vec{m} &= \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}), \\ \vec{n} &= \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{e}).\end{aligned}$$

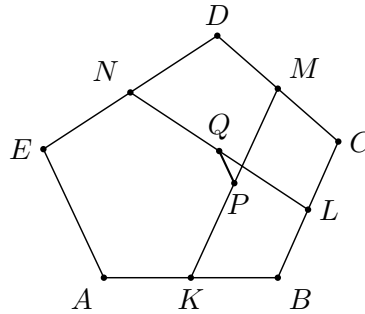
Točke P i Q su polovišta dužina $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$ pa vrijedi

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{1}{2}(\vec{k} + \vec{m}) = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}), \\ \vec{q} &= \frac{1}{2}(\vec{l} + \vec{n}) = \frac{1}{4}(\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}).\end{aligned}$$

Konačno imamo da je

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\vec{p} + \vec{q} = \frac{1}{4}(\vec{e} - \vec{a}), \\ \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \vec{e} - \vec{a}.\end{aligned}$$

Dakle, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ iz čega slijedi da su pravci AE i PQ paralelni te da je $|PQ| = \frac{1}{4}|AE|$.



Definicija: Kažemo da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ **kolinearni** ako su istog smjera, tj. ako je $\vec{a} = 0$ ili ako postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Kažemo da su vektori $\vec{a} = \overrightarrow{OA}, \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ i $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ **komplanarni** ako točke O, A, B i C leže u istoj ravnini.

Propozicija: Ako su $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni te $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni, tada postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Također vrijedi i obrat, ako je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ za neke skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tada su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

Zadatak 1.11. Neka su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ dva nekolinearna vektora i $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$. Pokažite da su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

Rješenje. Pokažimo da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Uvrštavanjem izraza za $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ iz uvjeta zadatka redom imamo

$$\begin{aligned}\vec{i} - \vec{j} &= \alpha(2\vec{i} - 3\vec{j}) + \beta(\vec{i} + 2\vec{j}), \\ \vec{i} - \vec{j} &= (2\alpha + \beta)\vec{i} + (-3\alpha + 2\beta)\vec{j}.\end{aligned}$$

Uspoređivanjem koeficijenata uz vektore $\vec{i}$ i $\vec{j}$ na lijevoj i desnoj strani jednakosti dobivamo sustav

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 1, \\ -3\alpha + 2\beta = -1. \end{cases}$$

Rješavanjem gornjeg sustava dobivamo da je $\alpha = \frac{3}{7}$ i $\beta = \frac{1}{7}$. Dakle, $\vec{c} = \frac{3}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}$ iz čega slijedi da su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni.

Zadatak 1.12. Odredite sve $t \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{a} = t\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2t\vec{j}$, $\vec{c} = 3t\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ budu komplanarni za bilo koje nekomplanarne vektore $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$.

Rješenje. Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, tj. ako vrijedi

$$\begin{aligned}3t\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} &= \alpha(t\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) + \beta(\vec{i} - 2t\vec{j}), \\ 3t\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} &= (\alpha t + \beta)\vec{i} + (\alpha - 2\beta t)\vec{j} + 4\alpha\vec{k}.\end{aligned}$$

Uspoređivanjem koeficijenata uz vektore $\vec{i}, \vec{j}$ i $\vec{k}$ na lijevoj i desnoj strani jednakosti dobivamo sustav

$$\begin{cases} \alpha t + \beta = 3t, \\ \alpha - 2\beta t = -3, \\ 4\alpha = 4. \end{cases}$$

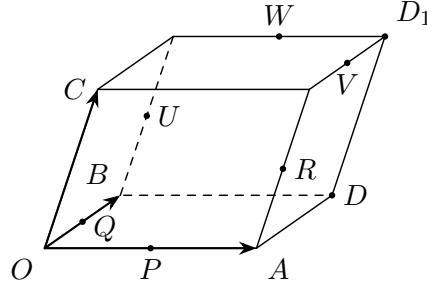
Iz posljednje jednadžbe direktno imamo da je $\alpha = 1$. Uvrštavanjem $\alpha = 1$ natrag u prvu jednadžbu sustava dobivamo $\beta = 2t$.

Konačno, uvrštavanjem $\alpha = 1$ i $\beta = 2t$ u drugu jednadžbu sustava dobivamo da je $2t^2 = 2$ iz čega slijedi da je $t = \pm 1$.

Provjera:

$$\text{za } t = 1 : \quad \vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}, \quad \text{za } t = -1 : \quad \vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}.$$

Zadatak 1.13. Dan je paralelepiped (prizma kojoj su osnovice paralelogrami) određen nekomplanarnim vektorima $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ i $\vec{OC}$. Dokažite da polovišta bridova P, Q, R, U, V i W , označenih kao na slici, leže u istoj ravnini.



Rješenje. Označimo s $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{OB}$ i $\vec{c} = \vec{OC}$.

Dokažimo najprije da se točke P, Q, R i U nalaze u istoj ravnini. Za to nam je dovoljno pokazati da su vektori $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$ i $\vec{PU}$ komplanarni.

Izrazimo najprije vektore $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$ i $\vec{PU}$ preko vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$. Redom imamo

$$\begin{aligned}\vec{PQ} &= \vec{PO} + \vec{OQ} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \\ \vec{PR} &= \vec{PA} + \vec{AR} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}, \\ \vec{PU} &= \vec{PO} + \vec{OB} + \vec{BU} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.\end{aligned}$$

Iz gornjih jednakosti slijedi da je

$$\vec{PU} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = 2\vec{PQ} + \vec{PR}.$$

Dakle, vektori $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$ i $\vec{PU}$ zaista jesu komplanarni.

Sasvim analogno se pokaže da točke P, Q, R i V leže u istoj ravnini i da točke P, Q, R i W leže u istoj ravnini iz čega konačno slijedi tvrdnja zadatka.