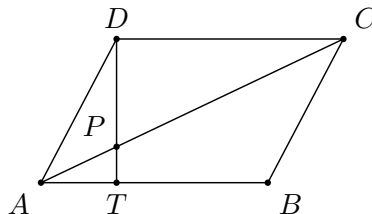


Poglavlje 1

Vektori

Zadatak 1.14. Dan je paralelogram $ABCD$ i točka T na stranici $\overline{AB}$ takva da je $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{n}\overrightarrow{AB}$. Neka je P presjek dijagonale $\overline{AC}$ i dužine $\overline{TD}$. U kojem omjeru točka P dijeli dijagonalu $\overline{AC}$?



Rješenje. Tražimo $\lambda \in \mathbb{R}$ t.d. je $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \lambda \overrightarrow{AC} = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \lambda n \overrightarrow{AT} + \lambda \overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{AT} + k \overrightarrow{TD} = \overrightarrow{AT} + k(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AT}) \\ &= (1 - k) \overrightarrow{AT} + k \overrightarrow{AD} = (1 - k) \overrightarrow{AT} + k \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Kako $\overrightarrow{AT}$ i $\overrightarrow{BC}$ nisu kolinearni, slijedi

$$\begin{cases} \lambda n = 1 - k, \\ \lambda = k, \end{cases} \implies \lambda n = 1 - \lambda, \quad \lambda = \frac{1}{n + 1}.$$

Neka su $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ vektori i $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ realni brojevi. Izraz $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ zovemo **linearna kombinacija** vektora $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Vektori $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ su **linearno nezavisni** ako je njihova linearna kombinacija $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$ jednaka nulvektoru $\vec{0}$ samo za $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Vektori $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ su **linearno zavisni** ako nisu linearno nezavisni, tj. ako postoje $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (koji nisu svi nula) t.d. $\alpha_1 \vec{a}_1 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$.

Vektori su linearno zavisni ako i samo ako barem jedan vektor možemo izraziti preko ostalih.

- U ravnini najviše dva vektora mogu biti linearno nezavisna (tri ili više vektora su linearno zavisni).

- Svaki skup vektora koji sadrži nulvektor je linearno zavisn.
- U prostoru najviše tri vektora mogu biti linearno nezavisna.
- Dimenzija prostora = maksimalan broj linearno nezavisnih vektora u njemu.
- Prostor vektora u 1, 2 i 3 dimenzije označavamo redom s V^1 , V^2 i V^3 .

V^1 :

- Vektori na pravcu, kolinearni vektori.
- Svaka 2 su linearno zavisna.
- Ako je $\vec{a} \neq \vec{0}$, onda za svaki $\vec{b} \in V^1$ postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ t.d. $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

V^2 :

- Vektori u ravnini, komplanarni vektori.
- Svaka 3 su linearno zavisna.
- Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno nezavisni, onda $\forall \vec{c} \in V^2 \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.d. $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$.

V^3 :

- Vektori u prostoru.
- Svaka 4 su linearno zavisna.
- Ako odaberemo 3 linearno nezavisna vektora, onda se svaki vektor u V^3 može prikazati kao njihova linearna kombinacija.

Svaki skup maksimalnog broja linearno nezavisnih vektora zovemo **baza**.

- Baze od V^1, V^2, V^3 redom imaju 1, 2 i 3 elementa.
- Baza za V^1 : bilo koji vektor $\vec{a} \in V^1$, $\vec{a} \neq \vec{0}$.
Baza za V^2 : dva nekolinearna vektora.
Baza za V^3 : tri nekomplanarna vektora.

Svaki vektor se može na **jedinstven** način prikazati kao linearna kombinacija vektora baze!

Zadatak 1.15. Dani su vektori $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{c} = -\vec{m} + 7\vec{n}$, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ linearno nezavisni, odredite linearnu zavisnost vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{p}$.

Rješenje. $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ se nalaze u istoj ravnini (određenoj s $\vec{m}$ i $\vec{n}$). $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{p}$ se nalaze u istoj ravnini jer je $\vec{p} = 3\vec{m} + 4\vec{n}$.

$$\implies \vec{a}, \vec{b} \text{ i } \vec{p} \text{ su linearno zavisni } \implies \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ t.d. je } \vec{p} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}.$$

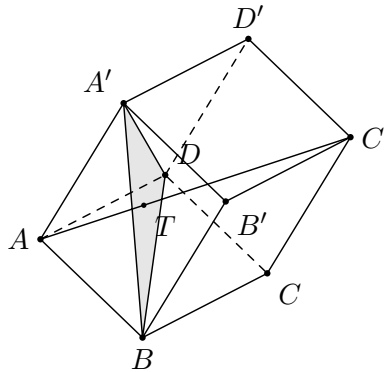
$$\implies 3\vec{m} + 4\vec{n} = \alpha(3\vec{m} - \vec{n}) + \beta(\vec{m} - 2\vec{n}),$$

$$3\vec{m} + 4\vec{n} = (3\alpha + \beta)\vec{m} + (-\alpha - 2\beta)\vec{n}.$$

$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 3 \\ -\alpha - 2\beta = 4 \end{cases} \implies 5\alpha = 10, \quad \alpha = 2, \quad \beta = 3 - 3\alpha, \quad \beta = -3.$$

$$\implies \vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}.$$

Zadatak 1.19. Neka je $ABCD A' B' C' D'$ paralelepiped. Dokažite da pravac AC' siječe $\triangle BDA'$ u njegovom težištu.



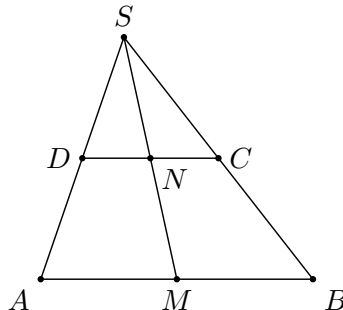
Rješenje. Neka je T težište $\triangle BDA'$ te neka su $\vec{AT}$, $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ i $\vec{AA'}$ radijvektori točaka T, B, D, A' iz točke A . Tada je $\vec{AT} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'})$.

Želimo pokazati da T leži na pravcu AC' , tj. da T dijeli $\vec{AC'}$ u omjeru $\lambda \in \mathbb{R}$, odnosno da je $\vec{AT} = \lambda \vec{AC'}$.

$$\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CC'} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA'} = 3\vec{AT} \implies \vec{AT} = \frac{1}{3}\vec{AC'}.$$

Skup vektora $\{\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AA'}\}$ je baza.

Zadatak 1.20. Dokažite da u trapezu $ABCD$ polovišta osnovica i sjecište krakova leže na istom pravcu.

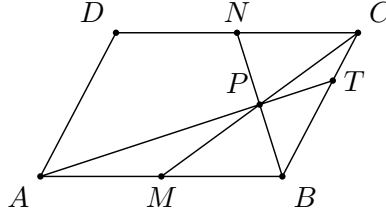


Rješenje. Izrazimo vektore $\vec{SM}$ i $\vec{SN}$ preko baze $\{\vec{SC}, \vec{SD}\}$ gdje su $\vec{SM}, \vec{SN}, \vec{SC}$ i $\vec{SD}$ radijvektori (s početkom u S).

$$\vec{SN} = \frac{1}{2}(\vec{SD} + \vec{SC}), \quad \vec{SM} = \frac{1}{2}(\vec{SA} + \vec{SB}) = \frac{\lambda}{2}(\vec{SD} + \vec{SC}).$$

Kako su $\triangle ABS$ i $\triangle DCS$ slični, točka A dijeli $\overrightarrow{SD}$ u omjeru $\lambda \in \mathbb{R}$ baš kao i što točka B dijeli $\overrightarrow{SC}$ u omjeru $\lambda \in \mathbb{R}$ pa je $\overrightarrow{SA} = \lambda \overrightarrow{SD}$ i $\overrightarrow{SB} = \lambda \overrightarrow{SC}$ odakle slijedi da je $\overrightarrow{SM} = \frac{\lambda}{2}(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SC})$. Dakle, $\overrightarrow{SM} = \lambda \overrightarrow{SN}$ pa točke M, N i S leže na istom pravcu.

Zadatak 1.21. Neka je $ABCD$ paralelogram, M i N polovišta od $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, P sjecište od $\overline{BN}$ i $\overline{CM}$ te T sjecište od $\overline{AP}$ i $\overline{BC}$. Odredite u kojem omjeru točka T dijeli $\overline{BC}$.

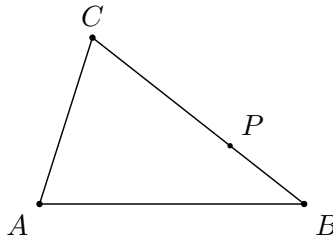


Rješenje. Prikažimo sve vektore pomoću baze $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\}$. Uočimo da je $MBCN$ paralelogram pa je P polovište od $\overline{MC}$ i $\overline{BN}$. Tražimo $\lambda \in \mathbb{R}$ t.d. je $\overrightarrow{BT} = \lambda \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AT} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC}, \\ \overrightarrow{AT} &= \alpha \overrightarrow{AP} = \alpha(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}) = \alpha \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{MC} \right) \\ &= \frac{\alpha}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha}{2} (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{\alpha}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \right) = \frac{3\alpha}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{\alpha}{2} \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$

Kako je prikaz u bazi jedinstven slijedi $\frac{3\alpha}{4} = 1$, tj. $\alpha = \frac{4}{3}$ pa je $\lambda = \frac{\alpha}{2}$, tj. $\lambda = \frac{2}{3}$.

Zadatak 1.22. Neka je ABC trokut i vektor $\overrightarrow{AP}$ određen linearnom kombinacijom $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Uz koji uvjet na skalare x i y točka P leži na pravcu BC ?



Rješenje. P leži na pravcu BC ako i samo ako $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.d. je $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \lambda(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1 - \lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda, \\ y = \lambda, \end{cases} \iff x + y = 1.$$