Poglavlje 7: Funkcije izvodnice

Snježana Lubura Strunjak i Zoran Vondraček

Zagreb, 11. siječnja 2021.

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Definicija 7.1

Definicija 7.1 Neka je X diskretna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, koja poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$. Stavimo $p_n := \mathbb{P}(X = n)$, $n \geq 0$. *Funkciju izvodnicu (vjerojatnosti)* od X definiramo kao

$$G(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

za $s \in \mathbb{R}$ za koje $\sum_{n=0}^{\infty} p_n |s|^n < \infty$.

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Definicija 7.1

Definicija 7.1 Neka je X diskretna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, koja poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$. Stavimo $p_n := \mathbb{P}(X = n)$, $n \geq 0$. *Funkciju izvodnicu (vjerojatnosti)* od X definiramo kao

$$G(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

za $s \in \mathbb{R}$ za koje $\sum_{n=0}^{\infty} p_n |s|^n < \infty$.

Uočimo, $G(s) = \mathbb{E}(s^X)$.

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Definicija 7.1

Definicija 7.1 Neka je X diskretna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, koja poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$. Stavimo $p_n := \mathbb{P}(X = n)$, $n \geq 0$. *Funkciju izvodnicu (vjerojatnosti)* od X definiramo kao

$$G(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

za $s \in \mathbb{R}$ za koje $\sum_{n=0}^{\infty} p_n |s|^n < \infty$.

Uočimo, $G(s) = \mathbb{E}(s^X)$.
Nadalje, za $-1 \leq s \leq 1$ imamo $\sum_{n=0}^{\infty} p_n |s|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$. To znači da za $-1 \leq s \leq 1$ red

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

apsolutno konvergira, pa zato i konvergira.

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Lema 7.2 i posljedice

Lema 7.2 Ako red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ s nenegativnim koeficijentima apsolutno konvergira za $|s| < 1$, onda apsolutno konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$.

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Lema 7.2 i posljedice

Lema 7.2 Ako red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ s nenegativnim koeficijentima apsolutno konvergira za $|s| < 1$, onda apsolutno konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$. Ako je $f(s) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ za $|s| < 1$, onda je $f'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$.

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Lema 7.2 i posljedice

Lema 7.2 Ako red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ s nenegativnim koeficijentima apsolutno konvergira za $|s| < 1$, onda apsolutno konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$. Ako je $f(s) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ za $|s| < 1$, onda je $f'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$. Nadalje,

$$f'(1-) := \lim_{s \nearrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n s^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \in [0, \infty].$$

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Lema 7.2 i posljedice

Lema 7.2 Ako red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ s nenegativnim koeficijentima apsolutno konvergira za $|s| < 1$, onda apsolutno konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$. Ako je $f(s) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ za $|s| < 1$, onda je $f'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$. Nadalje,

$$f'(1-) := \lim_{s \nearrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n s^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \in [0, \infty].$$

Primjenjujući Lemu 7.2 na funkciju izvodnicu imamo $G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ za $|s| < 1$, $G'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$ te, indukcijom,

$$G^{(n)}(s) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n!}{(k-n)!} p_k s^{k-n}, \qquad |s| < 1.$$

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Lema 7.2 i posljedice

Lema 7.2 Ako red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ s nenegativnim koeficijentima apsolutno konvergira za $|s| < 1$, onda apsolutno konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$. Ako je $f(s) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ za $|s| < 1$, onda je $f'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$. Nadalje,

$$f'(1-) := \lim_{s \nearrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n s^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \in [0, \infty].$$

Primjenjujući Lemu 7.2 na funkciju izvodnicu imamo $G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$ za $|s| < 1$, $G'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1}$ za $|s| < 1$ te, indukcijom,

$$G^{(n)}(s) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n!}{(k-n)!} p_k s^{k-n}, \qquad |s| < 1.$$

Specijalno, $G^{(n)}(0) = n! p_n$, odnosno

$$p_n = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}, \qquad n \geq 0.$$

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Lema 7.5

Lema 7.5 Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ red potencija s nenegativnim koeficijentima. Tada, za svaki $s_0 > 0$ vrijedi

$$\lim_{s \nearrow s_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s_0^n .$$

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Lema 7.5

Lema 7.5 Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ red potencija s nenegativnim koeficijentima. Tada, za svaki $s_0 > 0$ vrijedi

$$\lim_{s \nearrow s_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s_0^n.$$

Dokaz: Očito $\lim_{s \nearrow s_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n s_0^n$.

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Lema 7.5

Lema 7.5 Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ red potencija s nenegativnim koeficijentima. Tada, za svaki $s_0 > 0$ vrijedi

$$\lim_{s \nearrow s_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s_0^n .$$

Dokaz: Očito $\lim_{s \nearrow s_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n s_0^n$. Pokažimo obratnu nejednakost. Fiksirajmo $\alpha \in (0,1)$ i za $s \in (0, s_0)$ definirajmo

$$E_s := \{n \geq 0 : s^n \geq \alpha s_0^n\}.$$

Budući da $\lim_{s \nearrow s_0} s^n = s_0^n \geq \alpha s_0^n$ za sve $n \geq 0$, zaključujemo da $E_{s_1} \subseteq E_{s_2}$ za $0 < s_1 < s_2 < s_0$ i $\cup_{s \in (0, s_0)} E_s = \mathbb{Z}_+$. Nadalje, za $s \in (0, s_0)$ imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \geq \sum_{n \in E_s} a_n s^n \geq \alpha \sum_{n \in E_s} a_n s_0^n .$$

Lema 7.5 Neka je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ red potencija s nenegativnim koeficijentima. Tada, za svaki $s_0 > 0$ vrijedi

$$\lim_{s \nearrow s_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s_0^n .$$

Dokaz: Očito $\lim_{s \nearrow s_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} a_n s_0^n$. Pokažimo obratnu nejednakost. Fiksirajmo $\alpha \in (0,1)$ i za $s \in (0, s_0)$ definirajmo

$$E_s := \{n \geq 0 : s^n \geq \alpha s_0^n\}.$$

Budući da $\lim_{s \nearrow s_0} s^n = s_0^n \geq \alpha s_0^n$ za sve $n \geq 0$, zaključujemo da $E_{s_1} \subseteq E_{s_2}$ za $0 < s_1 < s_2 < s_0$ i $\cup_{s \in (0,s_0)} E_s = \mathbb{Z}_+$. Nadalje, za $s \in (0, s_0)$ imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \geq \sum_{n \in E_s} a_n s^n \geq \alpha \sum_{n \in E_s} a_n s_0^n .$$

Dakle,

$$\lim_{s \nearrow s_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sup_{s \in (0,s_0)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \geq \alpha \sup_{s \in (0,s_0)} \sum_{n \in E_s} a_n s_0^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n s_0^n .$$

Konačno, kako gornja nejednakost vrijedi za svaki $\alpha \in (0,1)$, slijedi tvrdnja.

Propozicija 7.3 Ako su X i Y dvije diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ takve da im se pripadne funkcije izvodnice, redom G_X i G_Y, podudaraju za sve $|s| < 1$, onda vrijedi $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n)$ za sve $n \geq 0$.

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Propozicija 7.3

Propozicija 7.3 Ako su X i Y dvije diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ takve da im se pripadne funkcije izvodnice, redom G_X i G_Y, podudaraju za sve $|s| < 1$, onda vrijedi $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(Y = n)$ za sve $n \geq 0$.

Dokaz: Imamo,

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!} = \frac{G_Y^{(n)}(0)}{n!} = \mathbb{P}(Y = n).$$

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Primjer 7.4

Primjer 7.4 (a) Neka je $\widetilde{X} \sim G_0(p)$. Tada je za $|s| < 1/(1-p)$,

$$\widetilde{G}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n s^n = p \sum_{n=0}^{\infty} ((1-p)s)^n = \frac{p}{1-s(1-p)}.$$

Ako je $X \sim G(p)$. Tada je za $|s| < 1/(1-p)$,

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} s^n = ps \sum_{n=0}^{\infty} ((1-p)s)^n = \frac{ps}{1-s(1-p)}.$$

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Primjer 7.4

Primjer 7.4 (a) Neka je $\widetilde{X} \sim G_0(p)$. Tada je za $|s| < 1/(1-p)$,

$$\widetilde{G}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n s^n = p \sum_{n=0}^{\infty} ((1-p)s)^n = \frac{p}{1-s(1-p)}.$$

Ako je $X \sim G(p)$. Tada je za $|s| < 1/(1-p)$,

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} s^n = ps \sum_{n=0}^{\infty} ((1-p)s)^n = \frac{ps}{1-s(1-p)}.$$

(b) Neka je $X \sim P(\lambda)$. Tada je za sve $s \in \mathbb{R}$,

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} s^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^n}{n!} = e^{\lambda(s-1)}.$$

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Momenti

Pomoću funkcija izvodnica (vjerojatnosti) mogu se računati i momenti slučajnih varijabli. Za $0 \leq s < 1$ imamo

$$G'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1}.$$

Za $s = 1$, po Lemi 7.5 (odn. Lemi 7.2)

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Momenti

Pomoću funkcija izvodnica (vjerojatnosti) mogu se računati i momenti slučajnih varijabli. Za $0 \leq s < 1$ imamo

$$G'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1}.$$

Za $s = 1$, po Lemi 7.5 (odn. Lemi 7.2), vrijedi

$$G'(1) := \lim_{s \nearrow 1} G'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \mathbb{E}(X).$$

Dakle, $\mathbb{E}(X) = G'(1) \in [0, \infty]$.

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Momenti

Pomoću funkcija izvodnica (vjerojatnosti) mogu se računati i momenti slučajnih varijabli. Za $0 \le s < 1$ imamo

$$G'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n s^{n-1}.$$

Za $s = 1$, po Lemi 7.5 (odn. Lemi 7.2), vrijedi

$$G'(1) := \lim_{s \nearrow 1} G'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \mathbb{E}(X).$$

Dakle, $\mathbb{E}(X) = G'(1) \in [0, \infty]$. Analogno zaključujemo

$$G^{(n)}(1) := \lim_{s \nearrow 1} G^{(n)}(s) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-n+1)].$$

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Momenti

Pomoću funkcija izvodnica (vjerojatnosti) mogu se računati i momenti slučajnih varijabli. Za $0 \leq s < 1$ imamo

$$G'(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1}.$$

Za $s = 1$, po Lemi 7.5 (odn. Lemi 7.2), vrijedi

$$G'(1) := \lim_{s \nearrow 1} G'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \mathbb{E}(X).$$

Dakle, $\mathbb{E}(X) = G'(1) \in [0, \infty]$. Analogno zaključujemo

$$G^{(n)}(1) := \lim_{s \nearrow 1} G^{(n)}(s) = \mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-n+1)].$$

Specijalno,

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= G''(1) + G'(1) - G'(1)^2. \end{aligned}$$

7.1 Funkcije izvodnice vjerojatnosti; Primjer 7.6

Primjer 7.6 Odredimo varijancu od $X \sim P(\lambda)$.

Primjer 7.6 Odredimo varijancu od $X \sim P(\lambda)$.
Rješenje: Imamo $G(s) = e^{\lambda(s-1)}$ za $s \in \mathbb{R}$. Dakle,

$$\begin{aligned} G'(s) &= \lambda e^{\lambda(s-1)} \\ G''(s) &= \lambda^2 e^{\lambda(s-1)} \\ G'(1) &= \lambda \\ G''(1) &= \lambda^2, \end{aligned}$$

iz čega zaključujemo

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli

Neka su X i Y dvije nezavisne diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$. Neka su f_X i f_Y te G_X i G_Y, redom, pripadne funkcije gustoće i funkcije izvodnice. Definiramo $Z := X + Y$. Neka su f_Z i G_Z, redom, pripadna funkcija gustoće i funkcija izvodnica. Imamo (vidi Teorem 5.24)

$$f_Z(n) = \sum_{j=0}^{n} f_X(j) f_Y(n-j), \qquad n \geq 0,$$

tj.

$$\mathbb{P}(Z = n) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = n-j), \qquad n \geq 0.$$

Želimo odrediti G_Z.

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli; Teorem 7.7

Teorem 7.7 (a) Neka su X i Y dvije nezavisne diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ s funkcijama izvodnicama, redom G_X i G_Y. Definiramo $Z := X + Y$ i neka je G_Z pripadna funkcija izvodnica. Tada vrijedi

$$G_Z(s) = G_X(s)G_Y(s), \qquad |s| \leq 1.$$

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli; Teorem 7.7

Teorem 7.7 (a) Neka su X i Y dvije nezavisne diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ s funkcijama izvodnicama, redom G_X i G_Y. Definiramo $Z := X + Y$ i neka je G_Z pripadna funkcija izvodnica. Tada vrijedi

$$G_Z(s) = G_X(s)G_Y(s), \qquad |s| \leq 1.$$

(b) Neka su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$, s, redom, funkcijama izvodnicama $G_{X_1}, \dots, G_{X_n}$. Definiramo $S := X_1 + \cdots + X_n$ i neka je G_S pripadna funkcija izvodnica. Tada vrijedi

$$G_S(s) = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s), \qquad |s| \leq 1.$$

Teorem 7.7 (a) Neka su X i Y dvije nezavisne diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ s funkcijama izvodnicama, redom G_X i G_Y. Definiramo $Z := X + Y$ i neka je G_Z pripadna funkcija izvodnica. Tada vrijedi

$$G_Z(s) = G_X(s)G_Y(s), \qquad |s| \leq 1.$$

(b) Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$, s, redom, funkcijama izvodnicama $G_{X_1}, \ldots, G_{X_n}$. Definiramo $S := X_1 + \cdots + X_n$ i neka je G_S pripadna funkcija izvodnica. Tada vrijedi

$$G_S(s) = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s), \qquad |s| \leq 1.$$

Dokaz: (a) Kako je $G_Z(s) = \mathbb{E}(s^Z)$, imamo

$$G_Z(s) = \mathbb{E}(s^{X+Y}) = \mathbb{E}(s^X s^Y) = \mathbb{E}(s^X)\mathbb{E}(s^Y) = G_X(s)G_Y(s), \quad |s| \leq 1,$$

gdje treća jednakost slijedi zbog nezavisnosti slučajnih varijabli X i Y.

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli; Teorem 7.7

Teorem 7.7 (a) Neka su X i Y dvije nezavisne diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ s funkcijama izvodnicama, redom G_X i G_Y. Definiramo $Z := X + Y$ i neka je G_Z pripadna funkcija izvodnica. Tada vrijedi

$$G_Z(s) = G_X(s)G_Y(s), \qquad |s| \leq 1.$$

(b) Neka su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne diskretne slučajne varijable koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$, s, redom, funkcijama izvodnicama $G_{X_1}, \dots, G_{X_n}$. Definiramo $S := X_1 + \cdots + X_n$ i neka je G_S pripadna funkcija izvodnica. Tada vrijedi

$$G_S(s) = G_{X_1}(s) \cdots G_{X_n}(s), \qquad |s| \leq 1.$$

Dokaz: (a) Kako je $G_Z(s) = \mathbb{E}(s^Z)$, imamo

$$G_Z(s) = \mathbb{E}(s^{X+Y}) = \mathbb{E}(s^X s^Y) = \mathbb{E}(s^X)\mathbb{E}(s^Y) = G_X(s)G_Y(s), \quad |s| \leq 1,$$

gdje treća jednakost slijedi zbog nezavisnosti slučajnih varijabli X i Y.
(b) Indukcijom iz (a).

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli; Primjer 7.8

Primjer 7.8 Neka su $X \sim P(\lambda)$ i $Y \sim P(\mu)$ nezavisne. Odredimo distribuciju od $Z := X + Y$.

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli; Primjer 7.8

Primjer 7.8 Neka su $X \sim P(\lambda)$ i $Y \sim P(\mu)$ nezavisne. Odredimo distribuciju od $Z := X + Y$.

Rješenje: Imamo

$$G_Z(s) = G_X(s)G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)}e^{\mu(s-1)} = e^{(\lambda+\mu)(s-1)}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Kako je $e^{(\lambda+\mu)(s-1)}$ funkcija izvodnica od $P(\lambda + \mu)$, pomoću Propozicije 7.3 zaključujemo $Z \sim P(\lambda + \mu)$.

Primjer 7.9 Neka je $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli uniformno distribuiranih na $\{1,\dots,n\}$. Nadalje, za $k\in\mathbb{N}$ stavimo $S_k := X_1+\cdots+X_k$ i

$$T_n := \min\{k : S_k > n\}.$$

Odredimo funkciju gustoće i funkciju izvodnicu od T_n te izračunajmo $\mathbb{E}(T_n)$

Primjer 7.9 Neka je $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli uniformno distribuiranih na $\{1,\ldots,n\}$. Nadalje, za $k\in\mathbb{N}$ stavimo $S_k := X_1+\cdots+X_k$ i

$$T_n := \min\{k : S_k > n\}.$$

Odredimo funkciju gustoće i funkciju izvodnicu od T_n te izračunajmo $\mathbb{E}(T_n)$

Rješenje: Prvo uočimo da je

$$\{T_n \geq j+1\} = \{T_n > j\} = \{S_j \leq n\}.$$

Nadalje, zbog nezavisnosti imamo

$$\mathbb{E}(s^{S_j}) = \mathbb{E}(s^{X_1+\cdots+X_j}) = \mathbb{E}(s^{X_1})^j, \qquad |s|<1.$$

Dakle, budući da je

$$G_{X_1}(s) = \mathbb{E}(s^{X_1}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} s^k = \frac{s-s^{n+1}}{n(1-s)} = \frac{s}{n}\frac{1-s^n}{1-s}, \qquad |s|<1,$$

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli; Primjer 7.9

imamo

$$G_{S_j}(s) = \mathbb{E}(s^{S_j}) = \left(\frac{s}{n}\right)^j \left(\frac{1-s^n}{1-s}\right)^j, \qquad |s| < 1.$$

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli; Primjer 7.9

imamo

$$G_{S_j}(s) = \mathbb{E}(s^{S_j}) = \left(\frac{s}{n}\right)^j \left(\frac{1-s^n}{1-s}\right)^j, \qquad |s| < 1.$$

Slijedi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_j \le k) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(S_j = l) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_j = l) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{s^l}{1-s} \mathbb{P}(S_j = l) = \frac{1}{1-s} \sum_{l=0}^{\infty} s^l \mathbb{P}(S_j = l) \\
&= \frac{G_{S_j}(s)}{1-s} = \left(\frac{s}{n}\right)^j \frac{(1-s^n)^j}{(1-s)^{j+1}} \\
&= \frac{1}{n^j} s^j \left(\sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} (-1)^l s^{nl}\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} s^l\right)^{j+1}, \qquad |s| < 1.
\end{aligned}$$

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli; Primjer 7.9

imamo

$$G_{S_j}(s) = \mathbb{E}(s^{S_j}) = \left(\frac{s}{n}\right)^j \left(\frac{1-s^n}{1-s}\right)^j, \qquad |s| < 1.$$

Slijedi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_j \le k) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(S_j = l) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_j = l) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{s^l}{1-s} \mathbb{P}(S_j = l) = \frac{1}{1-s} \sum_{l=0}^{\infty} s^l \mathbb{P}(S_j = l) \\
&= \frac{G_{S_j}(s)}{1-s} = \left(\frac{s}{n}\right)^j \frac{(1-s^n)^j}{(1-s)^{j+1}} \\
&= \frac{1}{n^j} s^j \left(\sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} (-1)^l s^{nl}\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} s^l\right)^{j+1}, \qquad |s| < 1.
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{P}(S_j \le n)$ je jednaka koeficijentu uz s^n izraza na desnoj strani gornje relacije. Očito, doprinos srednjeg faktora mora biti $\binom{j}{0}(-1)^0 = 1$, a zadnjeg koeficijent uz s^{n-j}.

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli; Primjer 7.9

imamo

$$G_{S_j}(s) = \mathbb{E}(s^{S_j}) = \left(\frac{s}{n}\right)^j \left(\frac{1-s^n}{1-s}\right)^j, \qquad |s| < 1.$$

Slijedi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_j \le k) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(S_j = l) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_j = l) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{s^l}{1-s} \mathbb{P}(S_j = l) = \frac{1}{1-s} \sum_{l=0}^{\infty} s^l \mathbb{P}(S_j = l) \\
&= \frac{G_{S_j}(s)}{1-s} = \left(\frac{s}{n}\right)^j \frac{(1-s^n)^j}{(1-s)^{j+1}} \\
&= \frac{1}{n^j} s^j \left(\sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} (-1)^l s^{nl} \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} s^l \right)^{j+1}, \qquad |s| < 1.
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{P}(S_j \le n)$ je jednaka koeficijentu uz s^n izraza na desnoj strani gornje relacije. Očito, doprinos srednjeg faktora mora biti $\binom{j}{0}(-1)^0 = 1$, a zadnjeg koeficijent uz s^{n-j}. Po Teoremu 3.9 taj koeficijent je jednak broju cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$k_1 + \cdots + k_{j+1} = n - j, \qquad k_1, \ldots, k_{j+1} \ge 0,$$

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli; Primjer 7.9

imamo

$$G_{S_j}(s) = \mathbb{E}(s^{S_j}) = \left(\frac{s}{n}\right)^j \left(\frac{1-s^n}{1-s}\right)^j, \qquad |s| < 1.$$

Slijedi,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_j \le k) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(S_j = l) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=l}^{\infty} s^k \mathbb{P}(S_j = l) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{s^l}{1-s} \mathbb{P}(S_j = l) = \frac{1}{1-s} \sum_{l=0}^{\infty} s^l \mathbb{P}(S_j = l) \\
&= \frac{G_{S_j}(s)}{1-s} = \left(\frac{s}{n}\right)^j \frac{(1-s^n)^j}{(1-s)^{j+1}} \\
&= \frac{1}{n^j} s^j \left(\sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} (-1)^l s^{nl}\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} s^l\right)^{j+1}, \qquad |s| < 1.
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{P}(S_j \le n)$ je jednaka koeficijentu uz s^n izraza na desnoj strani gornje relacije. Očito, doprinos srednjeg faktora mora biti $\binom{j}{0}(-1)^0 = 1$, a zadnjeg koeficijent uz s^{n-j}. Po Teoremu 3.9 taj koeficijent je jednak broju cjelobrojnih rješenja jednadžbe

$$k_1 + \cdots + k_{j+1} = n - j, \qquad k_1, \ldots, k_{j+1} \ge 0,$$

a taj broj je jednak

$$\binom{j+1+n-j-1}{j+1-1} = \binom{n}{j}.$$

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli; Primjer 7.9

Dakle,

$$\mathbb{P}(T_n \geq j+1) = \mathbb{P}(S_j \leq n) = \frac{\binom{n}{j}}{n^j}.$$

Sada imamo

$$\mathbb{P}(T_n = j) = \mathbb{P}(T_n \geq j) - \mathbb{P}(T_n \geq j+1) = \frac{\binom{n}{j-1}}{n^{j-1}} - \frac{\binom{n}{j}}{n^j}, \qquad n \geq j \geq 1.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} s^j \mathbb{P}(T_n > j) &= \sum_{j=0}^{n} s^j \mathbb{P}(T_n > j) = \sum_{j=0}^{n} s^j \mathbb{P}(T_n \geq j+1) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{s}{n}\right)^j \binom{n}{j} = \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n, \qquad s \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Specijalno, za $s = 1$ imamo

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n > j) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Konačno,

$$\begin{aligned} G_{T_n}(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n = j) s^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \geq j) s^j - \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \geq j+1) s^j \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{n+1} s^j \frac{1}{n^{j-1}} \binom{n}{j-1} - \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n \\ &= 1 + (s-1)\left(1 + \frac{s}{n}\right)^n, \qquad s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

7.2 Zbroj nezavisnih slučajnih varijabli; Primjer 7.9

Konačno,

$$
\begin{aligned}
G_{T_n}(s) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n = j) s^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \geq j) s^j - \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(T_n \geq j+1) s^j \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n+1} s^j \frac{1}{n^{j-1}} \binom{n}{j-1} - \left(1 + \frac{s}{n}\right)^n \\
&= 1 + (s-1)\left(1 + \frac{s}{n}\right)^n, \qquad s \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Također, po Lemi 7.5, imamo

$$
\mathbb{E}(T_n) = G'_{T_n}(1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.
$$

7.2.1 Slučajne sume

Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i jednakodistribuiranih diskretnih slučajnih varijabli koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ te neka je N diskretna slučajna varijabla koja također poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ i koja je nezavisna od niza $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7.2.1 Slučajne sume

Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i jednakodistribuiranih diskretnih slučajnih varijabli koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ te neka je N diskretna slučajna varijabla koja također poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ i koja je nezavisna od niza $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definiramo slučajnu sumu S kao

$$S(\omega) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega), & N(\omega) \geq 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

7.2.1 Slučajne sume

Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i jednakodistribuiranih diskretnih slučajnih varijabli koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ te neka je N diskretna slučajna varijabla koja također poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ i koja je nezavisna od niza $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definiramo slučajnu sumu S kao

$$S(\omega) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega), & N(\omega) \geq 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Također, za $n \geq 1$ definiramo $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Neka su G_{X_n}, $n \in \mathbb{N}$, G_N i G_S funkcije izvodnice od, redom, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, N, i S. Odredimo G_S.

7.2.1 Slučajne sume

Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih i jednakodistribuiranih diskretnih slučajnih varijabli koje poprimaju vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ te neka je N diskretna slučajna varijabla koja također poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$ i koja je nezavisna od niza $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Definiramo slučajnu sumu S kao

$$S(\omega) := \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega), & N(\omega) \geq 1 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Također, za $n \geq 1$ definiramo $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Neka su G_{X_n}, $n \in \mathbb{N}$, G_N i G_S funkcije izvodnice od, redom, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, N, i S. Odredimo G_S. Imamo,

$$G_S(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = k)s^k, \qquad |s| \leq 1,$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = k) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = k, N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i = k, N = n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k, N = n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\,\mathbb{P}(N = n), \qquad k \geq 0. \end{aligned}$$

7.2.1 Slučajne sume

Uočimo da za funkciju izvodnicu G_{S_n}, $n \geq 1$, od S_n vrijedi $G_{S_n}(s) = G_{X_1}(s)^n$, $|s| \leq 1$. Sada imamo

$$\begin{aligned} G_S(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\, \mathbb{P}(N = n) s^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\, s^k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{S_n}(s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{X_1}(s)^n = G_N(G_{X_1}(s)), \qquad |s| \leq 1. \end{aligned}$$

7.2.1 Slučajne sume

Uočimo da za funkciju izvodnicu G_{S_n}, $n \geq 1$, od S_n vrijedi $G_{S_n}(s) = G_{X_1}(s)^n$, $|s| \leq 1$. Sada imamo

$$\begin{aligned} G_S(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\, \mathbb{P}(N = n) s^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n = k)\, s^k = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{S_n}(s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{X_1}(s)^n = G_N(G_{X_1}(s)), \qquad |s| \leq 1. \end{aligned}$$

Odredimo sada očekivanje slučajne sume. Vrijedi $\mathbb{E}(S) = G_S'(1)$. Kako je

$$G_S'(s) = G_N'(G_{X_1}(s)) G_{X_1}'(s), \qquad |s| < 1,$$

imamo

$$G_S'(1) = G_N'(G_{X_1}(1)) G_{X_1}'(1) = G_N'(1) G_{X_1}'(1) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1).$$

Dakle, $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$.

7.2.1 Slučajne sume; Primjer 7.10

Primjer 7.10 Bacamo simetričan novčić. Svaki put kada padne pismo bacamo simetričnu igraću kocku i zabilježimo broj. Prestajemo kada prvi put pri bacanju novčića padne glava. Neka je S ukupan zbroj brojeva palih pri bacanju kocke. Odredimo $G_S(s)$ i $\mathbb{E}(S)$.

7.2.1 Slučajne sume; Primjer 7.10

Primjer 7.10 Bacamo simetričan novčić. Svaki put kada padne pismo bacamo simetričnu igraću kocku i zabilježimo broj. Prestajemo kada prvi put pri bacanju novčića padne glava. Neka je S ukupan zbroj brojeva palih pri bacanju kocke. Odredimo $G_S(s)$ i $\mathbb{E}(S)$.

Rješenje: Neka je

$$N := \text{broj bacanja kocke} = \text{broj bacanja pisama prije prve glave.}$$

Očito, $N \sim G_0(1/2)$. Dakle, $G_N(s) = 1/(2-s)$, $|s| < 2$.

7.2.1 Slučajne sume; Primjer 7.10

Primjer 7.10 Bacamo simetričan novčić. Svaki put kada padne pismo bacamo simetričnu igraću kocku i zabilježimo broj. Prestajemo kada prvi put pri bacanju novčića padne glava. Neka je S ukupan zbroj brojeva palih pri bacanju kocke. Odredimo $G_S(s)$ i $\mathbb{E}(S)$.

Rješenje: Neka je

$$N := \text{broj bacanja kocke} = \text{broj bacanja pisama prije prve glave.}$$

Očito, $N \sim G_0(1/2)$. Dakle, $G_N(s) = 1/(2-s)$, $|s| < 2$. Nadalje, neka je

$$X_n := \text{broj pri } n\text{-tom bacanju kocke}, \qquad n \geq 1.$$

Imamo,

$$G_{X_1}(s) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} s^i = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

7.2.1 Slučajne sume; Primjer 7.10

Primjer 7.10 Bacamo simetričan novčić. Svaki put kada padne pismo bacamo simetričnu igraću kocku i zabilježimo broj. Prestajemo kada prvi put pri bacanju novčića padne glava. Neka je S ukupan zbroj brojeva palih pri bacanju kocke. Odredimo $G_S(s)$ i $\mathbb{E}(S)$.

Rješenje: Neka je

$$N := \text{broj bacanja kocke} = \text{broj bacanja pisama prije prve glave.}$$

Očito, $N \sim G_0(1/2)$. Dakle, $G_N(s) = 1/(2-s)$, $|s| < 2$. Nadalje, neka je

$$X_n := \text{broj pri } n\text{-tom bacanju kocke}, \qquad n \geq 1.$$

Imamo,

$$G_{X_1}(s) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} s^i = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$G_S(s) = G_N(G_{X_1}(s)) = \frac{1}{2 - \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}}, \qquad |s| \leq 1.$$

7.2.1 Slučajne sume; Primjer 7.10

Primjer 7.10 Bacamo simetričan novčić. Svaki put kada padne pismo bacamo simetričnu igraću kocku i zabilježimo broj. Prestajemo kada prvi put pri bacanju novčića padne glava. Neka je S ukupan zbroj brojeva palih pri bacanju kocke. Odredimo $G_S(s)$ i $\mathbb{E}(S)$.

Rješenje: Neka je

$$N := \text{broj bacanja kocke} = \text{broj bacanja pisama prije prve glave.}$$

Očito, $N \sim G_0(1/2)$. Dakle, $G_N(s) = 1/(2-s)$, $|s| < 2$. Nadalje, neka je

$$X_n := \text{broj pri } n\text{-tom bacanju kocke}, \qquad n \geq 1.$$

Imamo,

$$G_{X_1}(s) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6} s^i = \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$G_S(s) = G_N(G_{X_1}(s)) = \frac{1}{2 - \frac{s(1-s^6)}{6(1-s)}}, \qquad |s| \leq 1.$$

Konačno, $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X_1)$. Imamo $\mathbb{E}(N) = G_N'(1) = 1$ i $\mathbb{E}(X_1) = 7/2$ pa je $\mathbb{E}(S) = 7/2$.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; definicija i svojstva

U ovom odjeljku X je diskretna slučajna varijabla ili apsolutno neprekidna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; definicija i svojstva

U ovom odjeljku X je diskretna slučajna varijabla ili apsolutno neprekidna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definicija 7.11. Pretpostavimo da postoji $0 < \delta < 1$ takav da je $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ za sve $|t| < \delta$. Funkcija $M : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ definirana s

$$M(t) := \mathbb{E}(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} e^{tx} f(x), & X \text{ diskretna} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, & X \text{ apsolutno neprekidna.} \end{cases}$$

zove se *funkcija izvodnica momenata* od X.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; definicija i svojstva

U ovom odjeljku X je diskretna slučajna varijabla ili apsolutno neprekidna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definicija 7.11. Pretpostavimo da postoji $0 < \delta < 1$ takav da je $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ za sve $|t| < \delta$. Funkcija $M : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ definirana s

$$M(t) := \mathbb{E}(e^{tX}) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} e^{tx} f(x), & X \text{ diskretna} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, & X \text{ apsolutno neprekidna.} \end{cases}$$

zove se *funkcija izvodnica momenata* od X.

Svojstva funkcije izvodnice M:

(i) $M(0) = 1$;

(ii) $e^{tX} > 0$ pa je $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq \infty$;

(iii) ako je $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ za $|t| < \delta$, onda

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}(e^{tX} 1_{\{X \geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{tX} 1_{\{X < 0\}}).$$

Dakle, $\mathbb{E}(e^{tX} 1_{\{X \geq 0\}}) < \infty$ i $\mathbb{E}(e^{tX} 1_{\{X < 0\}}) < \infty$ za $|t| < \delta$.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; svojstva

(iv) ako je $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ za $|t| < \delta$, onda

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{t|X|}) &= \mathbb{E}(e^{t|X|}1_{\{X\geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{t|X|}1_{\{X<0\}}) \\
&= \mathbb{E}(e^{tX}1_{\{X\geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{-tX}1_{\{X<0\}}) \\
&\leq \mathbb{E}(e^{tX}) + \mathbb{E}(e^{-tX}).
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{E}(e^{t|X|}) < \infty$ za $|t| < \delta$.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; svojstva

(iv) ako je $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ za $|t| < \delta$, onda

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{t|X|}) &= \mathbb{E}(e^{t|X|}1_{\{X\geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{t|X|}1_{\{X<0\}}) \\
&= \mathbb{E}(e^{tX}1_{\{X\geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{-tX}1_{\{X<0\}}) \\
&\leq \mathbb{E}(e^{tX}) + \mathbb{E}(e^{-tX}).
\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{E}(e^{t|X|}) < \infty$ za $|t| < \delta$. Nadalje, kako je

$$e^{t|X|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t|X|)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n|X|^n}{n!}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

zaključujemo da je $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ i $|\mathbb{E}(X^n)| < \infty$ za sve $n \geq 0$.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; svojstva

(iv) ako je $\mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$ za $|t| < \delta$, onda

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{t|X|}) &= \mathbb{E}(e^{t|X|}1_{\{X\geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{t|X|}1_{\{X<0\}})\\ &= \mathbb{E}(e^{tX}1_{\{X\geq 0\}}) + \mathbb{E}(e^{-tX}1_{\{X<0\}})\\ &\leq \mathbb{E}(e^{tX}) + \mathbb{E}(e^{-tX}).\end{aligned}$$

Dakle, $\mathbb{E}(e^{t|X|}) < \infty$ za $|t| < \delta$. Nadalje, kako je

$$e^{t|X|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t|X|)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n|X|^n}{n!}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

zaključujemo da je $\mathbb{E}(|X|^n) < \infty$ i $|\mathbb{E}(X^n)| < \infty$ za sve $n \geq 0$. Također, zbog $e^{tX} \leq e^{|t||X|}$ i

$$\mathbb{E}(e^{|t||X|}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n|X|^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n\mathbb{E}(|X|^n)}{n!} < \infty, \qquad |t| < \delta,$$

imamo

$$M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^nX^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\mathbb{E}(X^n)}{n!} < \infty, \qquad |t| < \delta.$$

7.3 Funkcije izvodnice momenata; svojstva

Deriviranjem gornje relacije (primjenom Leme 7.2) dobivamo

$$M'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}\mathbb{E}(X^n)}{(n-1)!} < \infty, \qquad |t| < \delta,$$

i, matematičkom indukcijom, za $k \geq 1$,

$$M^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}\mathbb{E}(X^n)}{(n-k)!} < \infty, \qquad |t| < \delta. \tag{1}$$

7.3 Funkcije izvodnice momenata; svojstva

Deriviranjem gornje relacije (primjenom Leme 7.2) dobivamo

$$M'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}\mathbb{E}(X^n)}{(n-1)!} < \infty, \qquad |t| < \delta,$$

i, matematičkom indukcijom, za $k \geq 1$,

$$M^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{t^{n-k}\mathbb{E}(X^n)}{(n-k)!} < \infty, \qquad |t| < \delta. \tag{1}$$

Dakle, $M^{(n)}(0) = \mathbb{E}(X^n)$ što objašnjava ime *funkcija izvodnica momenata*.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Primjer 7.12

Primjer 7.12 Odredimo funkciju izvodnicu momenata od $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Primjer 7.12

Primjer 7.12 Odredimo funkciju izvodnicu momenata od $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Za $t \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} M(t) &= \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma x+\mu)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t\sigma)^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}. \end{aligned}$$

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Primjer 7.12

Primjer 7.12 Odredimo funkciju izvodnicu momenata od $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Za $t \in \mathbb{R}$ imamo

$$
\begin{aligned}
M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma x+\mu)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t\sigma)^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

Odredimo sada $\mathbb{E}(X)$ i $\mathrm{Var}(X)$. Imamo $\mathbb{E}(X) = M'(0)$,
$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = M''(0) - M'(0)^2$ i

$$
\begin{aligned}
M'(t) &= (\sigma^2 t + \mu) e^{t^2\sigma^2/2+t\mu} \\
M''(t) &= (\sigma^2 t + \mu)^2 e^{t^2\sigma^2/2+t\mu} + \sigma^2 e^{t^2\sigma^2/2+t\mu} \\
M'(0) &= \mu \\
M''(0) &= \mu^2 + \sigma^2.
\end{aligned}
$$

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Primjer 7.12

Primjer 7.12 Odredimo funkciju izvodnicu momenata od $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Za $t \in \mathbb{R}$ imamo

$$
\begin{aligned}
M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma x+\mu)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t\sigma)^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

Odredimo sada $\mathbb{E}(X)$ i $\mathrm{Var}(X)$. Imamo $\mathbb{E}(X) = M'(0)$,
$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = M''(0) - M'(0)^2$ i

$$
\begin{aligned}
M'(t) &= (\sigma^2 t + \mu) e^{t^2\sigma^2/2+t\mu} \\
M''(t) &= (\sigma^2 t + \mu)^2 e^{t^2\sigma^2/2+t\mu} + \sigma^2 e^{t^2\sigma^2/2+t\mu} \\
M'(0) &= \mu \\
M''(0) &= \mu^2 + \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Dakle, $\mathbb{E}(X) = \mu$ i $\mathrm{Var}(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$, iz čega se ponovno vidi značenje parametara μ i σ.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Primjer 7.13

Primjer 7.13 Odredimo funkciju izvodnicu momenata od $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Neka je $t < \lambda$. Tada imamo

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Primjer 7.13

Primjer 7.13 Odredimo funkciju izvodnicu momenata od $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Neka je $t < \lambda$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda-t}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda-t} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha .
\end{aligned}$$

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Primjer 7.13

Primjer 7.13 Odredimo funkciju izvodnicu momenata od $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$. Neka je $t < \lambda$. Tada imamo

$$\begin{aligned} M(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\lambda-t}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{dy}{\lambda-t} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha . \end{aligned}$$

Specijalno, ako je $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, tada je za $t < \lambda$,

$$M(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Teorem 7.14

Teorem 7.14 Neka su X i Y nezavisne diskretne slučajne varijable (ili nezavisne apsolutno neprekidne slučajne varijable) s funkcijama izvodnicama momenata, redom, M_X i M_Y, koje su definirane za $|t| < \delta$. Definirajmo $Z := X + Y$. Tada postoji pripadna funkcija izvodnica momenata M_Z, dobro je definirana za $|t| < \delta$ i vrijedi $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$ za $|t| < \delta$.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Teorem 7.14

Teorem 7.14 Neka su X i Y nezavisne diskretne slučajne varijable (ili nezavisne apsolutno neprekidne slučajne varijable) s funkcijama izvodnicama momenata, redom, M_X i M_Y, koje su definirane za $|t| < \delta$. Definirajmo $Z := X + Y$. Tada postoji pripadna funkcija izvodnica momenata M_Z, dobro je definirana za $|t| < \delta$ i vrijedi $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$ za $|t| < \delta$.

Dokaz: Dokaz provodimo za diskretne slučajne varijable X i Y. Iz nezavisnosti od X i Y slijedi nezavisnost od e^{tX} i e^{tY} za sve $t \in \mathbb{R}$.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Teorem 7.14

Teorem 7.14 Neka su X i Y nezavisne diskretne slučajne varijable (ili nezavisne apsolutno neprekidne slučajne varijable) s funkcijama izvodnicama momenata, redom, M_X i M_Y, koje su definirane za $|t| < \delta$. Definirajmo $Z := X + Y$. Tada postoji pripadna funkcija izvodnica momenata M_Z, dobro je definirana za $|t| < \delta$ i vrijedi $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$ za $|t| < \delta$.

Dokaz: Dokaz provodimo za diskretne slučajne varijable X i Y. Iz nezavisnosti od X i Y slijedi nezavisnost od e^{tX} i e^{tY} za sve $t \in \mathbb{R}$. Nadalje, neka je f funkcija gustoće slučajnog vektora (X, Y) te neka su f_X i f_Y, redom, funkcije gustoće od X i Y.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Teorem 7.14

Teorem 7.14 Neka su X i Y nezavisne diskretne slučajne varijable (ili nezavisne apsolutno neprekidne slučajne varijable) s funkcijama izvodnicama momenata, redom, M_X i M_Y, koje su definirane za $|t| < \delta$. Definirajmo $Z := X + Y$. Tada postoji pripadna funkcija izvodnica momenata M_Z, dobro je definirana za $|t| < \delta$ i vrijedi $M_Z(t) = M_X(t)M_Y(t)$ za $|t| < \delta$.

Dokaz: Dokaz provodimo za diskretne slučajne varijable X i Y. Iz nezavisnosti od X i Y slijedi nezavisnost od e^{tX} i e^{tY} za sve $t \in \mathbb{R}$. Nadalje, neka je f funkcija gustoće slučajnog vektora (X, Y) te neka su f_X i f_Y, redom, funkcije gustoće od X i Y. Sada, za $|t| < \delta$, imamo

$$\mathbb{E}(e^{tZ}) = \mathbb{E}(e^{tX+tY}) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} e^{tx+ty} f(x,y) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} e^{tx+ty} f_X(x) f_Y(y)$$

$$= \sum_{x\in\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) \sum_{y\in\mathbb{R}} e^{ty} f_Y(y) = M_X(t)M_Y(t).$$

7.3 Funkcije izvodnice momenata

Napomenimo da obrat Teorema 7.14 ne vrijedi: iz jednakosti $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$, $|t| < \delta$, ne slijedi da su X i Y nezavisne.

7.3 Funkcije izvodnice momenata

Napomenimo da obrat Teorema 7.14 ne vrijedi: iz jednakosti $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$, $|t| < \delta$, ne slijedi da su X i Y nezavisne. Naime, neka je (X, Y) slučajni vektor dan sljedećom tablicom

$X\backslash Y$	0	1	2	f_X
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
f_Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Napomenimo da obrat Teorema 7.14 ne vrijedi: iz jednakosti $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$, $|t| < \delta$, ne slijedi da su X i Y nezavisne. Naime, neka je (X, Y) slučajni vektor dan sljedećom tablicom

$X\backslash Y$	0	1	2	f_X
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
f_Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Očito, X i Y su jednako distribuirane i *zavisne*. Također,

$$X + Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/9 & 2/9 & 3/9 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

7.3 Funkcije izvodnice momenata

Napomenimo da obrat Teorema 7.14 ne vrijedi: iz jednakosti $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$, $|t| < \delta$, ne slijedi da su X i Y nezavisne. Naime, neka je (X, Y) slučajni vektor dan sljedećom tablicom

$X \backslash Y$	0	1	2	f_X
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{3}$
2	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
f_Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

Očito, X i Y su jednako distribuirane i *zavisne*. Također,

$$X + Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/9 & 2/9 & 3/9 & 2/9 & 1/9 \end{pmatrix}.$$

Slijedi

$$G_X(s) = G_Y(s) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}s^2, \qquad s \in \mathbb{R},$$

pa je $G_X(s)G_Y(s) = (1/9)(1 + s + s^2)^2$ za $s \in \mathbb{R}$. S druge strane imamo

$$G_{X+Y}(s) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9}s + \frac{3}{9}s^2 + \frac{2}{9}s^3 + \frac{1}{9}s^4 = \frac{1}{9}(1 + s + s^2)^2, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Teorem 7.15

Dakle, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$ za sve $s \in \mathbb{R}$, a X i Y nisu nezavisne, što pokazuje da obrat Teorema 7.7 ne vrijedi. Konačno, uočimo da u ovom slučaju vrijedi $M_X(t) = M_Y(t) = G_X(e^t)$ za $t \in \mathbb{R}$ što uz dokazano pokazuje da ne vrijedi niti obrat Teorema 7.14.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Teorem 7.15

Dakle, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$ za sve $s \in \mathbb{R}$, a X i Y nisu nezavisne, što pokazuje da obrat Teorema 7.7 ne vrijedi. Konačno, uočimo da u ovom slučaju vrijedi $M_X(t) = M_Y(t) = G_X(e^t)$ za $t \in \mathbb{R}$ što uz dokazano pokazuje da ne vrijedi niti obrat Teorema 7.14.

Sljedeća dva teorema su primjeri rezultata koji imaju fundamentalno značenje u teoriji vjerojatnosti. Prvi teorem je analogon Propozicije 7.3 i kaže da funkcija izvodnica momenata jedinstveno određuje distribuciju. Drugi teorem daje karakterizaciju konvergencije po distribuciji, vidi Definiciju 4.53, pomoću konvergencije niza funkcija izvodnica. Dokazi ovih teorema izlaze iz okvira ovog kolegija.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Teorem 7.15

Dakle, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$ za sve $s \in \mathbb{R}$, a X i Y nisu nezavisne, što pokazuje da obrat Teorema 7.7 ne vrijedi. Konačno, uočimo da u ovom slučaju vrijedi $M_X(t) = M_Y(t) = G_X(e^t)$ za $t \in \mathbb{R}$ što uz dokazano pokazuje da ne vrijedi niti obrat Teorema 7.14.

Sljedeća dva teorema su primjeri rezultata koji imaju fundamentalno značenje u teoriji vjerojatnosti. Prvi teorem je analogon Propozicije 7.3 i kaže da funkcija izvodnica momenata jedinstveno određuje distribuciju. Drugi teorem daje karakterizaciju konvergencije po distribuciji, vidi Definiciju 4.53, pomoću konvergencije niza funkcija izvodnica. Dokazi ovih teorema izlaze iz okvira ovog kolegija.

Teorem 7.15 (teorem jedinstvenosti) Neka je X slučajna varijabla s funkcijom izvodnicom momenata M_X koja je definirana za $|t| < \delta$. Tada je distribucija od X jedinstveno određena s M_X.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Teorem 7.15

Dakle, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$ za sve $s \in \mathbb{R}$, a X i Y nisu nezavisne, što pokazuje da obrat Teorema 7.7 ne vrijedi. Konačno, uočimo da u ovom slučaju vrijedi $M_X(t) = M_Y(t) = G_X(e^t)$ za $t \in \mathbb{R}$ što uz dokazano pokazuje da ne vrijedi niti obrat Teorema 7.14.

Sljedeća dva teorema su primjeri rezultata koji imaju fundamentalno značenje u teoriji vjerojatnosti. Prvi teorem je analogon Propozicije 7.3 i kaže da funkcija izvodnica momenata jedinstveno određuje distribuciju. Drugi teorem daje karakterizaciju konvergencije po distribuciji, vidi Definiciju 4.53, pomoću konvergencije niza funkcija izvodnica. Dokazi ovih teorema izlaze iz okvira ovog kolegija.

Teorem 7.15 (teorem jedinstvenosti) Neka je X slučajna varijabla s funkcijom izvodnicom momenata M_X koja je definirana za $|t| < \delta$. Tada je distribucija od X jedinstveno određena s M_X. Preciznije, ako su X i Y slučajne varijable s funkcijama izvodnicama momenata, redom, M_X i M_Y, koje su definirane za $|t| < \delta$, takvima da $M_X(t) = M_Y(t)$ za sve $|t| < \delta$, onda su X i Y jednako distribuirane.

Primjer 7.16 Neka su $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne. Pokažimo da je $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Teorem 7.17

Primjer 7.16 Neka su $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne. Pokažimo da je $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
Rješenje: Po Primjeru 7.12 i Teoremu 7.14 imamo

$$M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = \left(e^{t\mu_1 + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}}\right)\left(e^{t\mu_2 + \frac{t^2\sigma_2^2}{2}}\right) = e^{t(\mu_1+\mu_2)+\frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

što zajedno s Teoremom 7.15 pokazuje tvrdnju.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Teorem 7.17

Primjer 7.16 Neka su $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne. Pokažimo da je $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
Rješenje: Po Primjeru 7.12 i Teoremu 7.14 imamo

$$M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(t) = \left(e^{t\mu_1 + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}}\right)\left(e^{t\mu_2 + \frac{t^2\sigma_2^2}{2}}\right) = e^{t(\mu_1+\mu_2) + \frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

što zajedno s Teoremom 7.15 pokazuje tvrdnju.

Teorem 7.17 Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli s funkcijama distribucije $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i funkcijama izvodnicama momenata $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koje su definirane za $|t| < \delta$. Nadalje, neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F i funkcijom izvodnicom momenta M, koja je definirana za $|t| < \delta$.

7.3 Funkcije izvodnice momenata; Teorem 7.17

Primjer 7.16 Neka su $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne. Pokažimo da je $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
Rješenje: Po Primjeru 7.12 i Teoremu 7.14 imamo

$$M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = \left(e^{t\mu_1 + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}}\right)\left(e^{t\mu_2 + \frac{t^2\sigma_2^2}{2}}\right) = e^{t(\mu_1+\mu_2) + \frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

što zajedno s Teoremom 7.15 pokazuje tvrdnju.

Teorem 7.17 Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli s funkcijama distribucije $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i funkcijama izvodnicama momenata $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koje su definirane za $|t| < \delta$. Nadalje, neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F i funkcijom izvodnicom momenta M, koja je definirana za $|t| < \delta$. Tada, ako $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji prema X, tj. $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ za sve $x \in C_F$, onda $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t)$ za sve $|t| < \delta$.

Primjer 7.16 Neka su $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne. Pokažimo da je $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Rješenje: Po Primjeru 7.12 i Teoremu 7.14 imamo

$$M_{X_1+X_2}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) = \left(e^{t\mu_1 + \frac{t^2\sigma_1^2}{2}}\right)\left(e^{t\mu_2 + \frac{t^2\sigma_2^2}{2}}\right) = e^{t(\mu_1+\mu_2) + \frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

što zajedno s Teoremom 7.15 pokazuje tvrdnju.

Teorem 7.17 Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz slučajnih varijabli s funkcijama distribucije $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i funkcijama izvodnicama momenata $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koje su definirane za $|t| < \delta$. Nadalje, neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F i funkcijom izvodnicom momenta M, koja je definirana za $|t| < \delta$. Tada, ako $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji prema X, tj. $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ za sve $x \in C_F$, onda $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t)$ za sve $|t| < \delta$. Obratno, ako $\lim_{n\to\infty} M_n(t) = M(t)$ za sve $|t| < \delta$, onda $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira po distribuciji ka X.