3.6 Neki primjeri

Pr. 3.44 U kutiji m_1 B i m_2 C kuglica. Izaberemo slučajno $n \le m_1 + m_2$ kuglica. Za $X :=$ ukupan broj B kuglica, imamo

$$0 \le X \le m_1, \quad 0 \le n - X \le m_2,$$

te

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}}{\binom{m_1+m_2}{n}}, \quad \text{za } \max\{0, n-m_2\} \le k \le \min\{n, m_1\}.$$

tzv. hipergeometrijska razdioba

$\hookrightarrow$ $\mathbb{E}[X] = ?$

$\to$ ako B kuglice označimo s $1, \dots, m_1$ te

$$A_i := \{\text{izvučena je } i\text{-ta B kuglica}\}, \; i = 1, \dots, m_1,$$

$$\boxed{\mathbb{E}[X]} = \mathbb{E}\Big[\sum_{i=1}^{m_1} \mathbb{1}_{A_i}\Big] \underset{\text{lin.!}}{=} \sum_{i=1}^{m_1} \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_i}]}_{=\mathbb{P}(A_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m_1} \frac{1 \cdot \binom{m_1+m_2-1}{n-1}}{\binom{m_1+m_2}{n}} = \sum_{i=1}^{m_1} \frac{n}{m_1+m_2} = \boxed{m_1 \cdot \frac{n}{m_1+m_2}}$$

[zašto $= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{m_1+m_2}$?]

Pr. 3.45 U svakoj igri vjerojatnost dobitka je $\boxed{p \in \langle 0, \tfrac{1}{2}]}$ [nezavisno od drugih igara], a u tom slučaju dobivate natrag 2 · ulog (inače, gubite ulog). Pretp. da u 1. igri uložite 1 kn $\to$ ako dobijete prestajete igrati, a ako ste izgubili prvih $n-1$ igara (za $n \ge 2$) u sljedećoj ulažete $\boxed{2^{n-1} \text{ kn}}$. Prestajete s igrom čim prvi put dobijete.

$\to$ [dakle, ulažemo 1, 2, 4, 8, ... do dobitka.]

(a) $\mathbb{P}(\{\text{ukupni dobitak je } 1\}) = 1.$ 80

(b) $\mathbb{E}[\underbrace{\text{ukupni ulog do prvog dobitka}}_{=:U}] = ?$

(c) Ako je vaš budžet dovoljan za najviše $\underline{m \in \mathbb{N}}$ igara,

$\mathbb{E}[\text{ukupni dobitak}] = ?$

Rj.: $T :=$ broj igara do prvog dobitka

$\Rightarrow T \sim G(p).$

(a) Znamo $\mathbb{P}(T < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) = 1$, a

ukupni dobitak je (jer $T < \infty$)

[vrijedi i za $T=1$]

$$D = \underbrace{2^{T-1}}_{\substack{\text{dobitak} \\ \text{u } T\text{-toj} \\ \text{igri}}} - \underbrace{\sum_{k=1}^{T-1} 2^{k-1}}_{\substack{\text{uloženo u} \\ \text{prvih } T-1 \\ \text{igara}}} = 2^{T-1} - \frac{1 - 2^{T-1}}{1-2} = \boxed{1.}$$

$T < \infty$

(b) $$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} 2^{k-1}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1 - 2^{T}}{1-2}\right]$$

ali!

$$= \underline{\mathbb{E}[2^T]} - 1 = \boxed{+\infty.}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k q^{k-1} p = 2p \sum_{k=1}^{\infty} (2q)^{k-1} = +\infty$$

$q \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{2q \geq 1}}$

(c) Sada

$$D = \begin{cases} 1, & \text{ako } T \leq m \\ -\sum_{k=1}^{m} 2^{k-1} = -(2^m - 1), & \text{ako } T > m \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}[D] \underset{A}{=} \mathbb{E}[D \mid T \leq n] \underbrace{P(T \leq n)}_{=1-q^n} + \mathbb{E}[D \mid T > n] \underbrace{P(T>n)}_{=q^n}$$

$H_1 = \{T \leq n\}$

$H_2 = \{T > n\}$

$$= 1 \cdot (1-q^n) - (2^n - 1)\, q^n$$

$$= 1 - (2q)^n$$

- $q = \frac{1}{2} = p \Rightarrow \mathbb{E}[D] = 0, \ \forall n$
- $q > p \underset{2q>1}{\Rightarrow} \mathbb{E}[D] < 0, \ \forall n$ te $\mathbb{E}[D] \searrow -\infty$ koda $n \to \infty$

[tipično za nas!]